

गणितातल्या गामती जामती

डॉ. जयंत नारळीकर

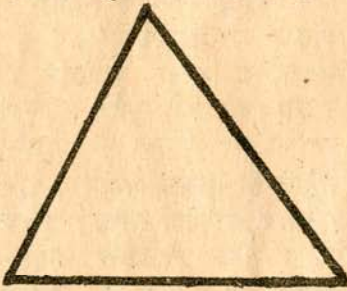
सामान्य माणूस गणित ह्या विषयाशी वचकून असतो. हा विषय ना भयंकर, अति क्लिष्ट, आकडेमोडीनी भरलेला... ह्याला दुरूनच नमस्कार केलेला बरा असे त्याला वाटते. ही धारणा बहुतेक शालेय जीवनात घडणाऱ्या गणिताच्या दर्शनाने निर्माण केली जाते, ही अेक दुर्दैवाची गोष्ट आहे. वास्तविक, गणिताच्या अनेक मनोरंजक पैलूंचे आणि मानवी कल्पनाशक्तिला चालना देणाऱ्या वेगवेगळ्या स्वरूपांचे दर्शन योग्य वेळी घडल्यास ह्या विषयाबद्दल जिव्हाळा आणि आदर निर्माण व्हायला हरकत नाही. गणित हा अवघड विषय आहे हे खरे— पण तो कशामुळे? निव्वळ आकडेमोडीमुळे नव्हे. लांबलचक फॉर्म्युलामुळे नव्हेच नव्हे! आधुनिक गणितातले कित्येक कूटप्रश्न विसायला फार सोपे वाटतात. पण ते सोडविण्यासाठी लागणारा अमूर्त आणि व्यापक दृष्टिकोन मोजक्या संशोधकांतच असतो.

अशा ह्या आधुनिक गणिताच्या काही मनोरंजक भागाची त्यातल्या काही कूटप्रश्नांची थोडक्यात ओळख करून देण्याचा ह्या लेखमालेचा अद्देश आहे. ती वाचून तुमच्या मनात ह्या विषयाबद्दल कुतूहल निर्माण झाले तर हा अद्देश सफल झाला असे मी म्हणेन.

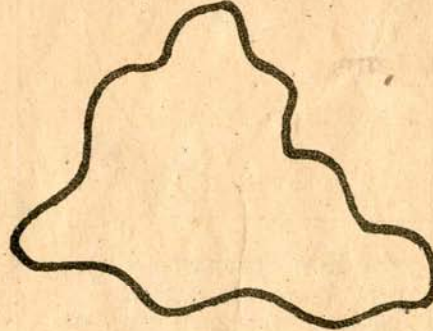
—डॉ. जयंत नारळीकर



येथे चित्र क्रमांक १ मध्ये दोन आकृत्या आहेत. या दोन आकृत्यात कोणत्या बाबतीत साम्य आहे का? दोन्ही आकृतीत



त्या अुत्तराशी सहमत होणार नाही. त्याचे अुत्तर असे असेल— समजा, अेका कागदावर डावीकडली



चित्र. क्र. १

समान असा अेक तरी गुण आहे का?

सामान्य माणूस याचे अुत्तर बहुतेक नकारार्थीच देतील. पण हाडाचा गणिती मात्र

आकृती काढली. त्यामुळे कागदाचे दोन भाग होतात. अेक आतला आणि अेक बाहेरचा. आतून बाहेर जाताना कुठेतरी त्या आकृतीचा

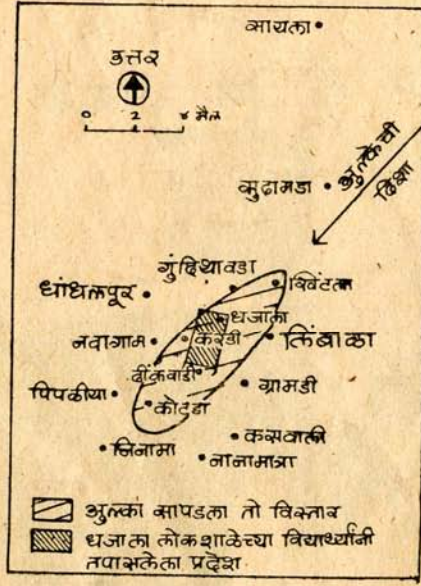
परिघ ओलांडावा लागेल. बरोबर हाच गुण अुजवीकडच्या आकृतीत आहे.

दोन्ही आकृत्यांतला हा समान गुण तुम्हाला सहजच समजेल. त्यात विशेष काय आहे? पण अशा तऱ्हेच्या सोप्या आणि अुघड वाटणाऱ्या गोष्टींमागे बरेच वेळा गणितातले अेखादे महत्त्वाचे प्रमेय दडलेले असते. वरचा जो गुण दाखविला त्यामागे जॉर्डनचे प्रमेय आहे.

'प्रमेय' शब्द पाहून घाबरू नका! कारण हे प्रमेय समजून घेण्यास अगदी सोपे आहे.

कुठलाही रबर बँड घ्या. तो अेका कागदावर ठेवून त्याला ताणून, वळवून हवा तसा आकार द्या. मात्र हे करताना त्या बँडचे कुठलेही

३५ कि. ग्रॅम हाती लागले. कित्येक मोठ तुकडे गावकऱ्यांनी काही कुतूहलाने फोडून पाहिले व काही न सापडता फेकून



आकृती-२

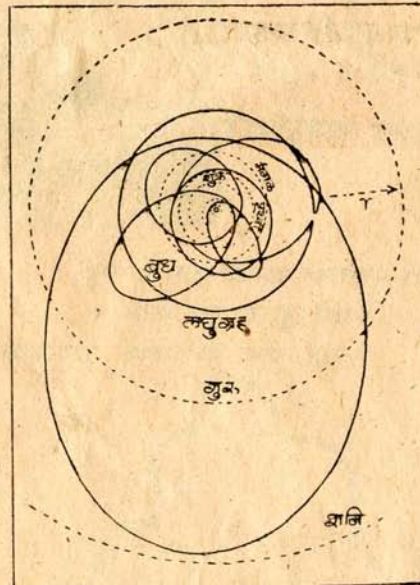
दिले! काही तुकडे गुपचुप संग्रह करून ठेवलेले असावेत असा अंदाज आहे. हे तुकडे वैज्ञानिक दृष्टीने अत्यंत अपयोगी असले तरी त्यांची अितर काहीच किंमत नाही. तेव्हा ज्यांच्याजवळ असले तुकडे असतील त्यांनी ते ताबडतोब लॅबोरेटरीला किंवा पोलीस चौकीवर नेऊन पोचवावेत अशी विनवणी रेडिओ व वर्तमानपत्रांतून गुजरातभर करण्यात आली आहे. पण त्या बाबतीत यश मिळाले नाही! अखादा खूप मोठा तुकडा कुठे जवळपासच पडलेला नसेल ना, म्हणून डायरेक्टर लाल ह्यांनी ह्या विभागात हेलिकॉप्टरने फेऱ्या मारल्या. पण अेकही मोठा तुकडा किंवा खड्डा सापडला नाही.

हा सगळा खटाटोप कशासाठी? केवळ दगड गोळा करण्यासाठी? त्यासाठी अवढा खर्च, अेवढे परिश्रम? अुल्कासंशोधन अेवढे महत्त्वाचे का? ह्या प्रश्नांची अुत्तरे अुल्कासंशोधनाच्या अितिहासात गुंतलेली आहेत! कशी ते पाहा.

अुल्कापात म्हणजे तुटलेले तारे असा अेक भ्रम आहे. पण तो साफ खोटा आहे! आकाशात दिसणारे तारे म्हणजे काही तिवूनानांच्या पोतडीतली गाजरे नव्हेत! सूर्याच्या ग्रहमालिकेतले सूर्याजवळचे बुध व शुक्र (पृथ्वीच्या संदर्भात, आकृती ४ पाहा) व सूर्यापासून दूरचे मंगळ, गुरू, शनी, यूरॅनस, नेपच्यून व प्लुटो हे ग्रह व चंद्रासारखे अुपग्रह सोडून दिले तर बाकीचे तारे आपल्या सूर्यापेक्षा कितीतरी पटीन मोठे असे तेजस्वी, स्वयंप्रकाशित महासूर्य आहेत! ते पृथ्वीपासून

हजारो कोटी मैल दूर आहेत व पृथ्वीकडे फिरकण्याचा संभव शून्यवत् आहे. फिरकलेच तर पृथ्वी कापरासारखी क्षणार्धात जळून भस्म होईल! तेव्हा पृथ्वीवर येणारे हे 'तुटलेले तारे' म्हणजे काहीतरी सूक्ष्म आकाराचे पदार्थ असावेत हे अुघड आहे. अुल्कापात हा प्रकार नवीन नाही. मक्केत पुजला जाणारा प्रसिद्ध कावाचा पवित्र दगड अेक अुल्का आहे! पण ह्या अुल्का पृथ्वीच्या वाहेरून कुठून तरी येतात ही कल्पना अलीकडे १८ व्या शतकात मान्य झाली! ह्याचे श्रय C H L A D N I (च्लाडनी) नावाच्या अेका जर्मन वैज्ञानिकडे जाते. त्याने १७९४ साली अक पुस्तक लिहून अुल्का म्हणजे अंतरिक्षातून आलेले दगड आहेत व ते पृथ्वीवरील हवेच्या घर्षणाने तापून प्रकाशमान होतात व तुटलेल्या ताऱ्यासारखे दिसतात असे प्रतिपादन केले. १८०३ साली L'AIGLE स्थळी अेक अुल्का पडताना दिसली, त्यावरून ह्या कल्पनेस पुष्टी मिळाली. तेव्हापासून आतापर्यंत सुमारे १८०० अुल्कापात जगभर नोंदले गेले आहेत. त्यातले सुमारे ६५० अमेरिकेत, १५० रशियात, ११० ऑस्ट्रेलियात व १०० भारतात झाले. भारतात पडलेली सगळ्यात मोठी

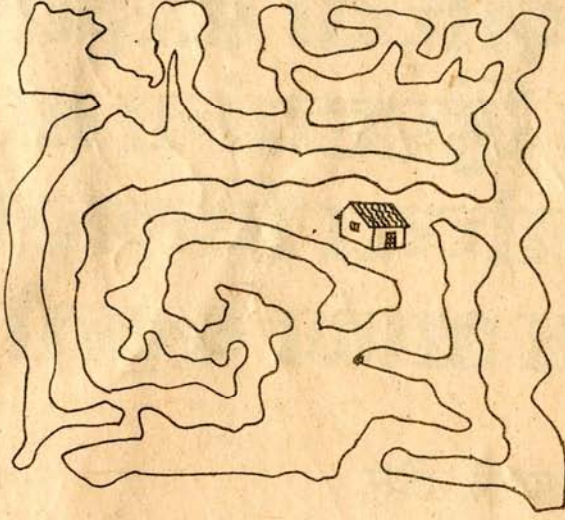
आकृती-३



सूर्याभोवती फिरणाऱ्या बुध, शुक्र, पृथ्वी, मंगळ, गुरू व शनी (यूरॅनस, नेपच्यून व प्लुटो फार दूर आहेत) ह्या ग्रहांचे व ४-५ लघुग्रहांचे (ASTEROIDS) अक्रमण मार्ग. मंगळ व गुरू ह्यांच्या मधल्या जागेत हजारो लघुग्रह सूर्याभोवती फिरत असतात. (ASTEROID BELT)

अुल्का म्हणजे १९२० साली अलाहाबादजवळ मेरुआ गावी पडलेला ५७ कि. ग्रॅम वजनाचा दगड! ह्याशिवाय कुट्टीपुरम् (३८ कि. ग्रॅम), देसुरी (२२ कि. ग्रॅम), अंदुरा (१८ कि. ग्रॅम) हे अितर प्रसिद्ध भारतीय अुल्काखंड आहेत. आपल्या सूर्यमालिकेत ९ ग्रह, ३२ अुपग्रह (पृथ्वीच्या चंद्रासारखे), आणि हजारो प्रकारचे लघुग्रह (ASTEROIDS); लाखाहून जास्त धूमकेतू (COMETS) व करोडो दगडधोडे आहेत! ह्यातले लहान तुकडे सूर्याभोवती फिरताना कधीकधी पृथ्वीच्या गुरुत्वाकर्षणात सापडून खाली पृथ्वीकडे येतात व हवेचे घर्षण सुरू होताच (साधारण ५०-१०० कि. मी. अुंचीवर) तापून चमकू लागतात. बहुतेक हवेतच जळून खाक होतात. स्वच्छ अंधान्या रात्री ताशी ५-१० अुल्का (METEORS) तर नुसत्या डोळ्याने दिसू शकतील. पण खरोखर हवेत शिरणाऱ्या लहान अुल्कांची संख्या रोजची १० कोटी असते व त्यांचा आकार रात्रिअेवढा असतो! आकार मोठमोठा तसतशी अुल्कांची संख्या कमी. साधारण किलोग्रॅम वजनाची अुल्का असेल तर ती हवेत पूर्णपणे जळून न जाता, तिचे तुकडे पृथ्वीवर येऊन पडतात व त्यांना अुल्कापिंड (METEORITE) म्हणतात. अुल्का खूपच मोठी असेल तर ती हवेत अेखाद्या अग्निगोळ्यासारखी (FIRE BALL) तळपते व तिचे हवेत तुकडे झाले तरी कित्येक किलोग्रॅम वजनाचे अुल्काखंड पृथ्वीवर पडून नासधूस होऊ शकते. पण अेकतर पृथ्वीचा पाअूण भाग समुद्र आहे. अुरलेल्या पाव भागात खूप दाट जंगले, वाळवंटे, दऱ्या-डोंगर, नदीनाले असून मनुष्यवस्ती लहानलहान गभात (गावे, शहरे वगैरे) केंद्रित असते. त्यामुळे दर वर्षी पृथ्वीवर सुमारे ५०० अुल्काखंड पडत असूनही त्यातले बहुतेक निर्जनस्थळी पडतात व फारफार तर १००-२०० माणसांच्या हाती केव्हातरी लागतात. भारतात दर वर्षी सुमारे ५ अुल्काखंड पडत असावेत. पण ह्यातले १-२ सुद्धा हाती लागत नाहीत. हा मुख्यत्वे अज्ञान व मागासलेपणाचा परिणाम. आपल्या लोकांस अुल्कांचे वैज्ञानिक महत्त्व नीटसे कळलेले नाही. ह्याशिवाय आळस, अंधश्रद्धा ह्यांचा हातभाग आहेच! अितर देशांची तीच स्थिती आहे. येवढा मोठा चीन (China) पण तेथे आतापर्यंत फक्त ५- अुल्कापिंड सापडले आहेत! अन् शेजारच्या चिमुकल्या पण सुधारलेल्या जपानमध्ये ३८ अुल्काखंड सापडले आहेत!

(पान ५३ वर)



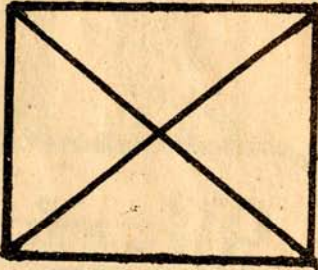
भाग एकमेकांवर पडता कामा नयेत. अशा तऱ्हेने तुम्हाला अनेक प्रकारच्या आकृत्या काढता येतील. चित्र क्रमांक १ मधल्या आकृत्या त्याच प्रकारच्या आहेत.

अशी कुठलीही आकृती कागदाचे (वर सांगितल्याप्रमाणे) 'आत' आणि 'बाहेर' असे दोन भाग करते.

हेच आहे जाँडनचे प्रमेय ! आहे की नाही सोपे ? पण ते सिद्ध करणे अतिशय अवघड आहे. खुद्द जाँडनने दिलेला पुरावादेखील पूर्ण बरोबर नव्हता !

कारण गणिताला पाहिजे असलेला पुरावा व्यापक स्वरूपाचा असतो. वरील अुदाहरणात तो सर्व तऱ्हेच्या आकृत्यांना (अर्थात वर दिलेल्या पथ्याप्रमाणे काढलेल्या) लागू पडला पाहिजे.

चित्र क्रमांक २ मध्ये हेच पथ्य पाळून



चित्र क्र. ३

अेक आकृती काढली आहे. त्या आकृतीचे अेक कुंपण अेका माणसाने आपल्या घराभोवती बांधले. पण ते तयार झाल्यावर त्याला प्रश्न

पडला की आपले घर कुंपणाच्या आत आहे का बाहेर ?

आकृतीवर अेक नजर टाकून तुम्ही सांगू शकाल का ? जाँडनचे प्रमेय याहूनही क्लिष्ट आकृत्यांना लागू पडते.

हे करता येते का बघा !

रबर बँडप्रमाणेच लवचिक पत्रा वाकवून, ठोकून त्याला वेगळे आकार देता येतात. कुंभाराच्या मातीचा गोळा घेऊन तो दाबून, चेपून वेगवेगळी रूपे त्याला देता येतात. अशा तऱ्हेचा कायापालट (ज्याच्यात कुठेही मोडतोड नाही) केल्यावर तयार होणाऱ्या आकृतींना अेक वेगळेच गणित लागू पडते. त्याला म्हणतात टर्पोलॉजी (मराठीत 'संस्थिती'). जाँडनचे प्रमेय हे ह्या विषयातले अेक प्रमेय आहे.

दिसायला अुघड आणि सोपे पण प्रत्यक्ष पुरावा मात्र अवघड अशा तऱ्हेची प्रमेये ह्या गणिताच्या शाखेत अनेक आहेत; न सुटलेली प्रमेये पण आहेत.

सोबतच्या चित्रात दिलेली आकृती पेन्सिलीने गिरवता येतील काय ? मात्र कुठल्याही रेषेवर अेकापेक्षा जास्त वेळा जायचे नाही आणि पेन्सिल अुचलायची नाही.

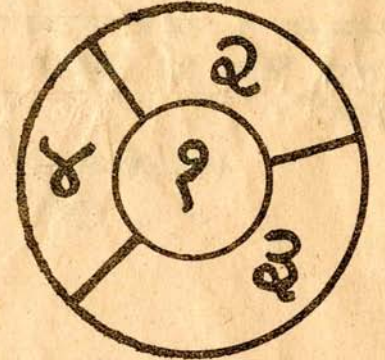
पाहा प्रयत्न करून. संस्थितीतले अेक प्रमेय सांगते की असे करणे ते शक्य नाही.

चार रंगांचा कूटप्रश्न

पृथ्वीवर वेगवेगळे देश आहेत (समुद्र हा अेक देशच समजू ! त्यांचे नकाशे रंगवायचे आहेत. अट अितकीच की शेजारशेजारचे देश वेगवेगळ्या रंगांनी रंगविले पाहिजेत. लांबचे अेकच सीमाभाग नसलेले देश त्याच रंगाचे चालतील.

असे नकाशे रंगवायला कमीत कमी किती रंग पुरतील ?

हा अेक अद्याप न सुटलेला कूटप्रश्न आहे. चित्र क्रमांक ४ मध्ये दाखवल्याप्रमाणे कमीत कमी चार रंग तरी पाहिजेत. पण चार रंग पुरेसे आहेत का ? नसल्यास पाच रंग आवश्यक असणारी आकृती काढता येतील का ?



चित्र क्र. ४

हा कूट प्रश्न सोडवणारा माणूस अेक अप्रतिम गणिती म्हणून विश्वविख्यात होतील !

पाहा प्रयत्न करून.

