

“भास्कराचार्य स्मृति व्याख्यान”

असे हे गणित, असे हे गणिती *

लेखक : जयंत नारळीकर

टाटा इन्स्टिट्यूट ऑफ फंडामेंटल रिसर्च, मुंबई-४०० ००५

भास्कराचार्य (१११४-११९३)

भारतीय गणितींचा आदर्शभूत असा हा गणिती आपल्या ‘सिद्धांत शिरोमणि’ ह्या ग्रंथासाठी प्रसिद्ध आहे. हा ग्रंथ त्याने वयाच्या ३६ व्या वर्षी लिहून पुरा केला. त्यांत चार विभाग आहेत : १) लीलावती २) बीजगणित ३) गणिताध्याय आणि ४) गोलाध्याय. अमूर्त आणि उपयोजित दोनही प्रकारच्या गणितांचा उत्कृष्ट संगम भास्कराचार्य च्या लेखनात सापडतो. इतकेच नव्हे तर गणितासारख्या रक्ष समजल्या जाणाऱ्या विषयाला काव्यमय स्वरूपात मांडण्यात त्याचा हातखंडा होता. भास्कराचार्यांचा हा वारसा आज पुढे चालवू पाहणाऱ्या गणिताच्या अध्यापकांच्यावतीने मी ह्या श्रेष्ठ गणितीला वंदन करतो ...

* महाराष्ट्र गणित अध्यापक महामंडळाच्या वार्षिक अधिवेशनात २६-१२-८२ रोजी केलेल्या भाषणावर आधारित.

प्रास्ताविक-

सर्व विज्ञानांची राणी समजल्या जाणाऱ्या गणित विषयाची महती गणिताच्या अध्यापकांना नव्याने सांगण्याची आवश्यकता नाही. अनेक शतकांच्या कालावधीनंतर आणि शेकडो संशोधकांच्या प्रयत्नांमुळे आज विज्ञान ज्याप्रमाणे प्रगतावस्थेत गेलेले दिसते त्याचप्रमाणे गणित देखील. अशा विकसित अवस्थेतील गणित आज शाळा कॉलेजच्या विद्यार्थ्यांना त्यांच्या शिक्षणक्रमांत पहायला मिळते.

मेजवानीतील पक्वान्न खाताना आपण कधी असा विचार करीत नाही की त्या चवदार पक्वान्नाची कृती कोणी शोबून काढली. ती कृती कोणा एका महाभागाला एकदम सुचली का तिचे आजचे स्वरूप अनेक पिढ्यांतील सुधारणांमुळे प्राप्त झाले? खाणारा

म्हणेल की चविष्ट भोजनाचा आस्वाद घेण्याऐवजी असल्या प्रश्नांची काथ्याकूट करायला कोणी सांगितले? हरकत नाही! मेजवानी नंतर ठेकर देत जरी ह्याबद्दल विचार केला तरी त्यातून पुष्कळ मनोरंजक गोष्टी सापडतील.

पण हे भाषण पक्वान्नांबद्दल नसून गणिताबद्दल आहे. वरील उदाहरण देण्याचा हेतू मात्र अशा तऱ्हेचेच प्रश्न गणिताबद्दल उपस्थित करण्याचा आहे. आजचा विद्यार्थी ज्या विकसित अवस्थेतले गणित पाहतो त्या अवस्थेत ते कोणत्या मार्गाने पोचले? त्याला आजचे स्वरूप मिळायला कोणाचे परिश्रम कारणीभूत झाले? ह्या प्रश्नांमागे दडलेला गणिताचा इतिहास हा देखील गणिताच्या शिक्षणातला एक घटक असावा असे मला वाटते.

माझ्या आजच्या व्याख्यानात मला अशी ऐतिहासिक बाबींवर भर द्यायचा आहे. अर्थात् दोन सहस्राहून जास्त वर्षांच्या गणिताच्या इतिहासाची तासाभरात माहिती देणे अशक्यच आहे. शिवाय अशा तऱ्हेच्या व्याख्यानात गणिताच्या तांत्रिक बाबतीत खोलवर शिरणे योग्य होणार नाही (आणि तसे करण्याची माझी पात्रताही नाही !). म्हणून गणिताच्या विकासाच्या इतिहासातील काही मनोरंजक मुद्यांवर भर देऊन आणि काही प्रसिद्ध गणितींच्या गोष्टी सांगून मी समाधान मानून घेणार आहे.

प्रमेय सिद्ध करणे म्हणजे काय—

युक्लिडच्या भूमितीतून आपण प्रमेये सिद्ध करण्याची कल्पना शिकतो. भूमितीला पद्धतशीर स्वरूप देण्याचे काम युक्लिडने (सुमारे २३ शतकापूर्वी) केले. काही गृहीतके 'सत्य' मानून त्यांच्या आधारे एकाहून एक जास्त गहन वाटणारी प्रमेये कशी सिद्ध करता येतात ते आपण भूमितीत प्रथम पाहतो.

पण सिद्ध करण्याची कल्पना पायथॅगोरसने प्रथम मांडली. पायथॅगोरसचे नाव त्याच्या प्रमेयामुळे शाळकरी मुलांना माहित असते. ह्या पायथॅगोरस बद्दल अशी आख्यायिका आहे की त्याला आपले ज्ञान शिकवायला विद्यार्थीच मिळत नव्हते. अखेर त्याने प्रत्येक प्रमेयामागे काही पैसे देण्याचे प्रलोभन दाखवले तेव्हा त्याला एक विद्यार्थी मिळाला म्हणजे प्रमेय शिकवायचे पायथॅगोरसने आणि शिकायची तसदी घेण्याबद्दल पैसे मिळणार विद्यार्थ्याला. पण पुढे पुढे विद्यार्थ्याला विषयात गोडी लागत गेली तेव्हा गृह-महाशयानी आपला नियम बदलला. त्यानी प्रमेय अर्धवटच सिद्ध केले आणि तो सिद्धता पूर्णत्वाला कशी न्यायची ह्याबद्दल विद्यार्थी उत्कटित झाला की त्यानी उत्तर पूर्ण करायला त्याच्याकडून फी वसूल करायला सुरवात केली.

क्षेत्रफळ आणि संकलन शास्त्र—

आर्किमिडीसचे नाव भौतिकशास्त्राच्या विद्यार्थ्यांना ठाऊक असते. गणितातसुद्धा त्याने महत्त्वाची कामगिरी बजावली होती. संकलनशास्त्र (Integral Calculus) या विषयाची सुरुवात आर्किमिडीसच्या क्षेत्रफळ मोजण्याच्या पद्धतीने झाली असे म्हणायला हरकत नाही.

वास्तविक आर्किमिडीसनंतर २००० वर्षांनी कलनशास्त्राचा विकास न्यूटन आणि लाइबनिट्झ यांनी केला. ह्यावरून आर्किमिडीस आपल्या काळाच्या मानाने किती पुढे गेलेला होता हे कळते.

काही जुने कूट प्रश्न—

प्लेटो नावाच्या तत्त्ववेत्त्याचे नावसुद्धा त्याच जमान्यातले. सम्राट अलेक्झांडरच्या गुरु अॅरिस्टॉटलचा हा गुरु. अॅरिस्टॉटल याने भौतिक शास्त्रावर विचार मांडताना गोलाकार वक्ररेषांना प्राधान्य दिले होते. बहुतेक त्यामागे प्लेटोची शिकवण असावी. प्लेटोच्या मते भूमितीच्या सर्व रचना फक्त फूटपट्टी आणि कंपास यांच्याच मदतीने केल्या पाहिजेत. इतर उपकरणे यांत्रिक घर्तीची समजून त्यांना गणितात विशेषतः भूमितीत वाव असता कामा नये असे प्लेटो म्हणे.

अशा बंधनातून भूमितीत काही रचना अवघड समजल्या जात. कोनाचे वरोवर तीन भाग करता येतील का? एका घनाच्या दुप्पट घनफळाचा घन काढता येईल का? एका गोलाच्या क्षेत्रफळाइतके क्षेत्रफळ असलेला चौरस काढता येईल का?

हे तीन जुने कूट प्रश्न केवळ फूटपट्टी आणि कंपासच्या सहाय्याने सुटणार नाहीत हे हळू हळू सिद्ध झाले. तिसरी रचना अशक्य आहे हे सिद्ध करायला १८८२ साल उजाडावे लागले.

मात्र फूटपट्टी आणि कंपासच वापरले पाहिजेत हे बंधन नसेल तर इतर उपकरणांनी हे प्रश्न सुटू शकतात. उदाहरणार्थ, महाराष्ट्रातील एक शिक्षक श्री. दिवेकर यांच्या उपकरणाने पहिला आणि तिसरा कूट प्रश्न सोडवता येतो.

देकार्ट (१५९६-१६५०)

रने देकार्ट याने फूटपट्टी आणि कंपासच्या बंधनातून भूमितीची मुक्तता केली. नोव्हेंबर १०, १६१९ साली देकार्टला एक स्वप्न पडले आणि त्यात त्याला वैश्लेषिक भूमिती (Analytical Geometry) चा साक्षात्कार झाला. वास्तविक त्या रात्री पडलेल्या तीन स्वप्नांपैकी त्याचे हे दुसरे

स्वप्न ! एका मोठ्या वादळात आपण सापडलो असून त्यांतून विज्ञानाने आपली सुटका केली असे त्याला त्यास्वप्नात भासले आणि सृष्टीची गूढे उकलण्यासाठी एक जादूची किल्लीच जणू आपल्या हाती आली असा आपला अनुभव त्याने नमूद केला आहे.

ग्रीक संस्कृतीत उद्भवलेल्या भूमितीला बीजगणिताचे स्वरूप देऊन देकार्टने एका नवीन विषयाची सुरुवात केली. भूमितीतले प्रमेय बीजगणितीय भाषेत मांडता येतात हे त्याने दाखवले. अनेक प्रमेये जी साध्या जुनाट मार्गांनी सुटत नव्हती ती ह्या नव्या मार्गाने सुटली. ८ जून १६३७ या दिवशी देकार्टच्या 'Method' ह्या नावाने ओळखल्या जाणाऱ्या पुस्तकाचा प्रकाशन समारंभ झाला. नव्या कल्पना मांडताना गॅलिलिओला झालेला त्रास पाहून आपलाही तसाच छळ होईल अशा भीतीने देकार्टने हे प्रकाशन पुष्कळ लांबणीवर टाकले होते.

फर्माचे शेवटचे प्रमेय -

सतराव्या शतकातला सर्वोत्तम गणिती म्हणून अनेकांनी ज्याला आदरांजली वाहिली तो फर्मा (Fermat) १६०१ मध्ये जन्मला आणि १६६५ मध्ये स्वर्गवासी झाला. आधुनिक गणितातल्या अनेक कल्पनांचा पाया फर्माच्या कार्यात सापडतो. विशेष करून अंकगणित (Theory of Numbers) हा विषय फर्माने पुष्कळ विकसित केला.

फर्माचे शेवटचे प्रमेय म्हणून ओळखला जाणारा कूट प्रश्न आता गणितज्ञांना चांगला परिचित आहे. तो प्रश्न थोडक्यात असा. अशा तऱ्हेचे तीन पूर्णांक x, y, z पुष्कळ आहेत ज्यांच्यात खालील प्रकारचा संबंध आहे.

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

उदाहरणार्थ $x = 3, y = 4, z = 5$ किंवा $x = 5, y = 12, z = 13$. . इत्यादी. ह्यापुढे जाऊन

$$x^3 + y^3 = z^3$$

असा संबंध असलेले तीन पूर्णांक असतील का ?

फर्माच्या मते उत्तर नकारार्थी आहे. इतकेच नव्हे तर त्याने असे निदान केले की, असे तीन पूर्णांक x, y, z ज्यांच्यातला संबंध

$$x^n + y^n = z^n, n \geq 3$$

अशा प्रकारचा आहे, मिळणे अशक्य आहे. इथे n हा पण पूर्णांक आहे. एका पुस्तकाच्या माजिन मध्ये असे विधान करून फर्मा म्हणतो, "हे विधान सिद्ध करायची एक उत्तम पद्धत मला सापडली पण ती नमूद करायला ही जागा अपुरी पडते."

फर्माने हे विधान दुसरीकडे कुठेच सिद्ध करून दाखवले नाही. इतरांनी ते सिद्ध करायचा प्रयत्न केला पण अद्याप त्यांना यश आले नाही. ते चुकीचे असेल तर तसे दाखवणेही अद्याप जमले नाही. १९०८ साली प्राध्यापक पॉल वुल्फस्केहल ह्यांनी एक लक्ष जर्मन मार्कचे पारितोषिक जाहीर केले होते, फर्माचे विधान चूक किंवा बरोबर हे दाखवण्यासाठी. पण ते पारितोषिक कोणी गणितज्ञ मिळवू शकला नाही.

फर्माचे शेवटचे प्रमेय n च्या काही मूल्यांकरता सिद्ध करण्यात गणितज्ञांना यश मिळाले आहे पण फर्माला अभिप्रेत होते तसे २ पेक्षा मोठ्या सर्व पूर्णांकासाठी नाही. मात्र फर्माने आपल्याला हे विधान सिद्ध करता येते हे काय म्हणून म्हटले? त्याच्या सुपीक डोक्याला इतरांना आजवर न सापडलेली पद्धत माहित होती? का आत्मवचनेचाच हा प्रकार होता? तज्ञांमध्ये ह्याबद्दल दुमत आहे.

आयझक न्यूटन -

गुरुवाकर्षणाच्या सिद्धांताचा जनक म्हणून न्यूटनचे नाव शाळकरी मुलांना माहित नसते. १६६५ च्या सुमारास इंग्लंडमधील मोठ्या प्लेगच्या साथीला धावून लोकांनी शहरातून खेड्यांकडे धाव घेतली. त्यावेळी न्यूटन आपल्या जन्मस्थळी वुलस्थॉर्प नावाच्या खेड्यात रहायला आला. त्यावेळी सफर चंद्रांच्या उद्यानात विचार करत बसला असताना झाडावरून एक सफरचंद त्याच्या डोक्यावर पडले आणि त्याला गुरुत्वाकर्षणाची कल्पना सुचली.

सफरचंदाची ही आख्यायिका कल्पित असावी. पण ती खरी घडून क्षणभर असा विचार कर. एखाद्या झाडाखाली बसलेल्या माणसावर झाडाचे फळ अचानक पडणे ही घटना किती संभाव्य आहे ?

सोळा फुटावरून फळ जमिनीवर पडायला एक सेकं-
दाचा कालावधि लागतो म्हणजे ते फळ एकंदर
आयुष्यातील (पिकून पडेपर्यंतचे) काही आठवडे
झाडावर असते. त्या उलट खाली पडण्याचा काळ
सेकंदाचाच. फळ पडताना पहायची संभाव्यता त्यामुळे
पुष्कळ कमी आहे हे दिसून येईल. अर्थात् त्याहुनही
असंभाव्य घटना म्हणजे ती पाहुन एखाद्याला गुरु-
त्वाकर्षणाची कल्पना सुचणे!

अर्थात् न्यूटन ही एक असामान्य व्यक्ती होती
हे निर्विवाद सत्य आहे. परंतु त्याला गुरुत्वाकर्षणाची
कल्पना कशी आणि केव्हा सुचली हे सांगणे शक्य
नाही. कारण ही कल्पना परिपक्व अवस्थेत त्याने
जगापुढे मांडली १६८६-८७ च्या काळात! आपल्या
'प्रिक्लिपिया' ग्रंथात गुरुत्वाकर्षण आणि गतीचे सिद्धांत
मांडून त्याने आधुनिक भौतिकशास्त्र आणि गतिशास्त्र
यांचा पाया घातला.

जर न्यूटनला १६६५-६६ च्या काळात गुरु-
त्वाकर्षणाची कल्पना सुचली असेल तर त्याने इतका
महत्त्वाचा शोध दोन दशकांहून जास्त वेळ का दडवून
ठेवला? दरम्यानच्या काळात राॅबर्ट हुक याने पण
गुरुत्वाकर्षणाची कल्पना स्वतःला सुचल्याचा दावा
केला व प्रिक्लिपियाचे प्रकाशन चालू असताना त्याने
न्यूटनवर कल्पनाचौर्याचा आरोप केला. न्यूटनचे
म्हणणे की, त्याला ही कल्पना हुककडून न मिळता
स्वतंत्रपणे सुचली. ह्या वादातून बाहेर पडताना
न्यूटन पुष्कळ त्रैतागला व त्याने आपल्या ग्रंथाच्या
तिसऱ्या खंडाचे प्रकाशन तहकूब ठेवले. शेवटी त्याच्या
प्रकाशकाच्या, एडमंड हॅलेच्या आग्रहामुळे त्याने
आपले मत बदलले.

न्यूटनखेरीज इतर कुठल्याही समकालीन
शास्त्रज्ञात गुरुत्वाकर्षणाचा सिद्धांत ग्रहांच्या गतीशी
पडताळून पाहण्याची प्रतिभा नव्हती कारण त्यासाठी
लागणारे गणित न्यूटननेच मांडले कलनशास्त्राचा
वापर त्यानेच सुरू केला आणि ग्रहांच्या कक्षा गुरु-
त्वाकर्षणाच्या सिद्धांताप्रमाणे ठरवून त्या केप्लरने
निरीक्षण केल्याप्रमाणेच आहेत हे दाखवले.

न्यूटन गणिताकडे त्याचा उपयोग सृष्टीची गूढे
उकलण्याकडे कसा होईल ह्या उद्देशाने पहात असे-

शुध्द गणित म्हणून नाही. त्याच्या एकंदर कार्यक्षेत्राचे
वर्णन थोडक्यात करणेसुद्धा आजच्या वेळेच्या बंध-
नात बसणार नाही. एक लहानशी घटना सांगून
न्यूटनचे आख्यान संपवतो.

असे म्हणतात की, गणितज्ञाची प्रतिभा चाळि-
शीनंतर बोथट होत जाते. न्यूटनने १६९६ साली
शाही टाकसाळीच्या वॉर्डनचे काम घेतले (१६९९
साली तो तिचा प्रमुख झाला). १६९५ मध्ये युरोप
मधील योहान बर्नोलीने आपल्या समकालीन गणित-
ज्ञांपुढे एक कूट प्रश्न टाकला. सहा महिन्यांच्या
कालावधीत कोणी तो प्रश्न सोडवू शकला नाही.
२९ जानेवारी १६९६ ह्या दिवशी सायंकाळी न्यूटन
कामावरून दमून घरी आला तेव्हा त्याच्या कानावर
ह्या कुट प्रश्नाची हकीकत आली. त्याला अवगत
असलेल्या गणिताच्या मदतीने त्याने तो जेवण
झाल्यावर चुटकीसारखा सोडवला. मात्र आता तो
गणितज्ञांपासून आणि त्यांच्या वादांपासून चार हात
लांबच रहात असल्याने त्याने आपले उत्तर निनावीच
राॅयल सोसायटीकडे पाठवले. न्यूटनचे उत्तर जेव्हा
बर्नोलीकडे पोचले तेव्हा, निनावी असूनसुद्धा ते कोणी
पाठवले असेल हे त्याने बरोबर ओळखले. तो उद्-
गारला, "पंजावरून मी सिंह ओळखू शकतो"

एक ऐतिहासिक वाद:-

न्यूटनच्या आयुष्याच्या शेवटच्या भागात
त्याला आणखी एका वादात उतरावे लागले. तो वाद
होता कलनशास्त्र कोणी शोधून काढले याबद्दल.
कलनशास्त्राचे प्राथमिक स्वरूप आर्किमिडीसच्या
गणितात आपण पाहिले. ज्यावेळी न्यूटन ह्या
शास्त्राचा उपयोग गती आणि गुरुत्वाकर्षणाचे सिद्धांत
सोडवण्यासाठी करत होता त्यावेळी युरोपमध्ये
लायबनिट्झ याने सुद्धा शुध्द गणिताच्या दृष्टि-
कोनातून ह्या शास्त्राचा पाया घातला.

न्यूटन आणि लायबनिट्झ समकालीन व मित्र
होते. परंतु त्यांचे देशबांधव. ज्यांना बहुतेकांना कल-
नशास्त्र कशाशी खातात हे माहीत नव्हते, त्यांनी हा
विषय कोणी प्रथम शोधला हा वाद उकरून काढला.
देशाभिमानाचा हट्टापायी कसा दुरुपयोग होतो याचे

हा वाद म्हणजे उत्कृष्ट उदाहरण आहे. इंग्लंड विरुद्ध युरोप असे तट पडले आणि त्या वादात अखेर १८१२ साली न्यूटन आणि लायबनिट्झ यांना देखील खेचण्यात आले. गणित-चौर्यांचे आरोप प्रत्यारोप होऊ लागले आणि एकेकाळचे मित्र परस्परांना पाण्यात पाहू लागले.

न्यूटनची प्रतिष्ठा गणित आणि विज्ञान ह्या विषयात लायबनिट्झपेक्षा जास्त होती हे निर्विवाद असले तरी कलनशास्त्र मांडण्याची पद्धत लायबनिट्झपेक्षा अधिक सुसंगत होती. तिचा अवलंब करून युरोपमधले कलनशास्त्र झपाट्याने विकसित होत गेले. इंग्लंड मधले गणितज्ञ मात्र न्यूटनची बोजड पद्धत हट्टाने वापरत आणि त्यामुळे त्यांची प्रगति अनेक दशके खुंटली. आजचे गणितज्ञ लायबनिट्झची पद्धत वापरतात.

गणिती घराणे-

न्यूटनच्या संदर्भात बर्नोलीचा उल्लेख आला. हे बर्नोली घराणे गणितज्ञांसाठी विख्यात आहे. निकोलस बर्नोली (१६२३-१७०८) चे तीन पुत्र जेकब I, निकोलस I आणि योहान I. निकोलस I चा मुलगा निकोलस II. योहान I ची तीन मुले निकोलस III, डॅनियल आणि योहान II आणि योहान II ची मुले योहान III व जेकब II. यापैकी बहुतेक बर्नोली गणितज्ञ निघाले. गंमत म्हणजे यापैकी इतर पेशा स्वीकारून शेवटी गणिताकडे वळलेले बर्नोलीही अनेक आहेत. त्यामुळे 'बर्नोलीचा अमुक अमुक शोध' असे म्हणून चालत नाही कुठला बर्नोली हे सांगावे लागते.

ही गणिती परंपरा एकोणीसाव्या शतकात संपली - त्या परंपरेतील शेवटचा योहान बर्नोली १८०७ मध्ये निघून पावला. परंतु याचा अर्थ असा नव्हे की पुढचे बर्नोली हुशार नव्हते. त्यांना गणिता-ऐवजी इतर विषयात अधिक आव्हात्मक प्रश्न दिसले म्हणून त्यांनी आपला मोर्चा तिकडे वळवला.

डॅनियल बर्नोलीची एक आख्यायिका सांगण्याजोगी आहे. तरुणपणीच त्याची कीर्ती युरोपभर

पसरली होती. एकदा प्रवास करत असताना त्याला एक व्यक्ती भेटली.

परस्परांची ओळख करून देताना डॅनियलने स्वतःचे नांव सांगितले. इतका पोरगेला तरुण सुप्रसिद्ध डॅनियल बर्नोली कसा असा अविश्वास व्यक्त करत ती व्यक्ती उपरोधाने म्हणाली. "असे काय? तर मी आहे आयझक न्यूटन"

आपल्या आयुष्यातले हे सर्वात सहत्वाचे प्रशस्तीपत्र असे डॅनियल शेवटपर्यंत म्हणे.

गणित आणि ईश्वर-

रशियाच्या सम्राजा कॅथरीनच्या दरबारात डिडेरो (Diderot) नावाचा एक नास्तिक तत्ववेत्ता आला. आपल्या तर्काच्या जोरावर त्याने रशियन तत्ववेत्त्यांना गारद करून टाकले. देव असणे शक्य नाही असे त्याचे म्हणणे अर्थात् धार्मिक लोकांना पटत नव्हते. पण ह्या तर्कबहादुराला सामना देणार कोण? अखेर कॅथरीनच्या दरबारातला गणित ऑयलर पुढे सरसावला. डिडेरोच्या तर्कशक्तीतला एक कमजोर दुवा त्याला सापडला - त्याला गणित बिलकूल येत नव्हते ऑयलर महाशयानी एक समीकरण लिहिले

$(a + b^n) / n = x$
आणि म्हटले, "म्हणून देव आहे. आता बोला!" डिडेरो काय बोलणार? असले भयंकर तर्कशास्त्र त्याने कधी पाहिलेच नव्हते.

परंतु ऑयलर हा केवळ ह्या विधानासाठी प्रसिद्ध नाही. गणितात विश्लेषणशास्त्र (Analysis) ह्या विषयात त्याने पुष्कळ नवीन शोध लावले. गती-शास्त्रात (Dynamics) देखील त्याची महत्त्वाची कामगिरी होती. १७८३ मध्ये वयाच्या ७६ व्या वर्षी त्याला मरण आले तेव्हा शेवटपर्यंत त्याची बुद्धी तल्लख होती. हर्शलने शोधलेला यूरॅनस ग्रह कुठल्या कक्षेत फिरत असेल याचे गणित त्याने मृत्यूपूर्वी काही तास मांडले आणि आपल्या नातवाशी खेळत असताना त्याला मृत्यूने पकडले.

गणित आणि ईश्वर यांचा 'सामना' आणखी एका संदर्भात पहायला मिळतो. फ्रेंचगणिती लप्लास याने *Mecanique Celeste* हा पाचखंडी प्रचंड ग्रंथ लिहिला. त्यांत न्यूटनच्या गुरुत्वाकर्षण आणि गतीच्या नियमांचा वापर करून सूर्यमालेतील ग्रह आणि उपग्रह यांच्या कक्षांचे गहन गणित सोडवले होते. लप्लासच्या ह्या मोठ्या कामगिरीमुळे न्यूटनच्या सिद्धांताला प्रतिष्ठा लाभली.

हा प्रचंड ग्रंथ चाळता चाळता फ्रांसच्या सम्राट नेपोलियन बोनापार्टने लप्लासला विचारले, "काय हो, ह्यांत मला देवाचा कुठे उल्लेख सापडत नाही?" तेव्हा लप्लास शांतपणे म्हणाला, "राजेसाहेब मला माझ्या गणितासाठी त्या गृहीतकाची आवश्यकताच भासली नाही."

लहान वयात चमकलेले गणिती -

न्यूटन नंतरच्या काळात अनेक गणितीय आणि वैज्ञानिक विषयात सर्वात चमकून उठलेला कोण? ह्या प्रश्नाचे उत्तर बहुसंख्य शास्त्रज्ञ देतील "कार्ल फ्रीडरीश गाउस" अंकगणित, विकलन भूमिती (*Differential Geometry*), विद्युतचुंबकीय शास्त्र इत्यादी अनेक विषयांत गाउसचे नाव अमर झाले आहे. हा गणिती 'मुलाचे पाय पाळण्यात दिसतात' ह्या म्हणीप्रमाणे अगदी लहान वयात चमकला.

तीन वर्षे वयाचा असताना गाउसने आपल्या वडिलांच्या जमाखर्चातली चूक दाखवली. बोलता येण्यापूर्वी आपण गणित करायला शिकलो असे तो गमतीने म्हणे वयाच्या दहाव्या वर्षी त्याने शाळेत शिक्षकांनी दिलेली गणित-श्रेढीतील शंभर संख्यांची बेरीज आकडेमोड न करता सूत्र वापरून करून त्यांचा चकित केले होते. हे सूत्र त्याने स्वतः शोधून काढले होते हे विशेष.

वयाच्या एकोणीसाव्या वर्षी, १७९६ साली गाउसने १७ समान बाजूंची बहुभुजाकृती फूटपट्टी आणि कंपासच्या सहाय्याने काढून दाखवली. ३, ४, ५, ६, समान बाजूचे बहुभुज काढणे सोपे आहे परंतु त्यापुढे जाणे तितकेसे सोपे नाही. गाउसने असे

सिद्ध केले की, जर बाजूंची संख्या अविभाज्य असेल आणि ती

$$p = 2^{2^x} + 1$$

ह्या स्वरूपाची असेल तर हे शक्य आहे. इथे x हा पूर्णांक आहे. उदा, $x = 0$ म्हणजे $p = 3$, $x = 1$ म्हणजे $p = 5$, $x = 2$ म्हणजे $p = 17$, - - - अर्थात अशा कितीही अविभाज्य संख्यांचा गुणाकार करून त्यांना २ ने हवे तितक्या वेळा गुणले तर जी संख्या तयार होईल तितक्या बाजूंची सम-बहुभुजाकृती काढता येईल. पण ह्या पलिकडे अशी रचना अशक्य आहे.

गाउसने आपला हा निष्कर्ष आपले प्राध्यापक कास्टनर यांना दाखविला. परंतु त्यांनी त्यावर विश्वास ठेवला नाही आणि तिकडे दुर्लक्ष केले. कास्टनर साहेबांना कविता करायचा छंद होता. पुढे गाउसने त्यांना असा टोमणा मारला की, "कास्टनर हे तर गणित्यांमध्ये सर्वोत्कृष्ट कवी आणि कविय्यांमध्ये सर्वोत्कृष्ट गणिती होते."

जरी गाउसकडे प्रथम असे दुर्लक्ष झाले तरी त्याला न जुमानता तो पुढे आला आणि आपल्या ७८ वर्षांच्या दीर्घायुष्यात त्याने पुष्कळ नाव कमावले. परंतु सर्वच श्रेष्ठ गणितींना न्यूटन व गाउस सारखे दीर्घायुष्य आणि जिवंत असताना कीर्ती मिळवण्याचे भाग्य लाभले नाही. अशांपैकी सर्वात दुर्दैवी ठरला एव्हारिस्ट गाल्वा (*Evasiste' Galois*)

बीजगणितातील पाच किंवा त्याहून अधिक घातांचे समीकरण सामान्यतया सोडवता येत नाही. दोन घातांचे समीकरण

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

सोडवून प्रत्यक्ष उत्तर वर्गमूळाचे चिन्ह वापरून लिहिता येते.

$$x = (-b \pm \sqrt{b^2 - ac}) / a.$$

तीन घातांचे समीकरण घनमूलांच्या वापर करून सोडवता येते. तीच स्थिती चार घातांच्या समीकरणाची आहे. पण चारहून अधिक घातांच्या समीकरणाचे उत्तर सामान्यतः करणीचिन्हे वापरून लिहिता येत नाही.

हा महत्त्वाचा निष्कर्ष बीजगणितीय उपायांनी सिद्ध करायचे काम गाल्वाने केले तेव्हा तो सतरा वर्षांचा होता. ह्या त्याच्या निष्कर्षातून आणि त्याने वापरलेल्या पद्धतीतून बीजगणिताचा एक नवीन भाग निर्माण झाला. आज तो भाग गाल्वाच्या नावे ओळखला जातो पण त्याच्या अकाली मृत्यूमुळे हे श्रेय त्याला जिवंतपणी मिळाले नाही.

फ्रेंच अँकॅडमीकडून मान्यता मिळवण्यासाठी आपला निबंध गाल्वाने त्यावेळचे प्रख्यात गणिती कोशी यांच्याकडे पाठवला. पण कोशीने निष्काळजीपणा दाखवून तिकडे दुर्लक्ष केले. दोन वर्षांनी गाल्वाने पुन्हा प्रयत्न केला. अँकॅडमी तर्फे दिल्या जाणाऱ्या पारितोषिकासाठी त्याने आपला प्रबंध पाठवला. संस्थेचे कार्यवाह तो प्रबंध घेऊन गेले. पण तो पाहण्यापूर्वीच त्यांचे देहावसान झाले आणि त्यांच्या पश्चात् त्यांच्या कागदपत्रात गाल्वाचा प्रबंध गहाळ झाला तो कायमचाच.

गाल्वाच्या दुर्दैवाचा कळस म्हणजे फ्रांसमधील राजकीय भांडणात सापडल्यामुळे गाल्वालाला द्वंद्वयुद्धासाठी सज्ज व्हावे लागले. एका यःकश्चित् बाईच्या लफड्यापायी गाल्वावर हे लचांड आले. ३० मे १८३२ च्या पहाटे द्वंद्वयुद्धात गाल्वा जखमी झाला आणि २४ तासांत त्याचा अंत झाला. २९ मेच्या रात्री गाल्वाने आपले महत्त्वाचे गणिती निष्कर्ष लिहून काढले. कारण त्याला जाणीव होती की, द्वंद्वयुद्धातून आपण वाचणार नाही. ह्याच कागदपत्रांनी गाल्वालाला मरणोत्तर कीर्तीच्या शिखरावर चढवले.

श्रीनिवास रामानुजन्-

गाल्वालाला आलेला अनुभव सुदैवाने एका तरुण भारतीय गणितज्ञाला आला नाही श्रीनिवास रामानुजन्चा जन्म २२ डिसेंबर १८८७ साली एका गरीब कुटुंबात झाला. कुम्भकोणमध्ये एका शालेत शिकत असताना त्याची गणितातली असामान्य प्रतिभा स्पष्ट होऊ लागली. १५ वर्षे वयाचा असताना त्याला कार्याने लिहिलेले 'शुद्ध गणिताचा सारांश' हे पुस्तक

मिळाले आणि जणू काय अलिवावाचा खजिनाच त्याच्या हाती आला. त्या गणितातली सूत्रे इतर पुस्तके उपलब्ध नसल्याने रामानुजन्ने स्वतः सिद्ध केली. भूमिती पादाक्रांत करून तो बीजगणिताकडे वळला आणि पुढे अंकगणित आणि विश्लेषणशास्त्राकडे. नमक्कलची देवी आपल्या स्वप्नात येते आणि आपल्याला नवे नवे निष्कर्ष सुचतात असे तो म्हणे ! एवढं खरे की सकाळी उठल्याबरोबर तो असे अनेक निष्कर्ष लिहून काढी. ते सिद्ध करणे त्याला नेहमीच जमत असे असे नाही.

जरी गणिताला वाहून घ्यायची त्याची इच्छा होती तरी पोटाकरता त्याला मद्रासमध्ये कारकुनाची नोकरी पत्करावी लागली. फावल्यावेळी त्याचे गणित आत्मसात करण्याचे प्रयत्न चालूच होते. परंतु त्याच्या संशोधनाचे मूल्यमापन करू शकणारे गणिती भारतात नव्हते. अखेर मित्रमंडळींच्या सल्याने त्याने केंब्रिज विद्यापीठातील सुप्रसिद्ध गणिती हार्डी यांच्याशी संपर्क साधला.

त्याचे १६ जानेवारी १९१३ चे पत्र हे हार्डीना लिहिलेले पहिले पत्र. मद्रास पोर्ट ट्रस्ट मध्ये वार्षिक २० पौंड (३०० रुपये) पगारावर काम करण्याच्या कारकूनाकडून आलेले ते पत्र पाहून हार्डी चाट पडले. कारण पत्राबरोबर सुमारे १२० प्रमेये जोडली होती. त्यातील ९५ निवडून त्यांचे हार्डीनी पुढे निवेदन केले. काही प्रमेये हार्डीना ठाऊक होती, काही चूक होती तर काही हार्डीना नवीन होती. नवीन प्रमेयांपैकी काही हार्डीना सिद्ध करता आली तर काही अवघड वाटली. पण गणिताच्या प्रमुखप्रवाहाशी कसलाही संपर्क नसलेला एक तरुण कारकून ही प्रमेये पाठवतो ही घटनाच त्यांना अजब वाटली. रामानुजन्ने कोणाचे निष्कर्ष चोरून तर आपल्याकडे पाठवले नाहीत ? ही कल्पना हार्डीनी स्वतःच खोडून काढली. त्याच्यामते इतके महत्त्वाचे निष्कर्ष चोरून पाठवणाऱ्यापेक्षा श्रेष्ठ गणितींची संख्या जास्त असते. त्यामुळे ह्या प्रमेयांमागे रामानुजन्ची प्रतिभाव काम करत असणार.

हार्डीनी प्रयत्न करून रामानुजन्ला केंब्रिजला आणले. प्रस्थापित गणित पद्धतीचा स्पर्श न झाल्यामुळे रामानुजन्ची निष्कर्ष काढण्याची पद्धत सदोष होती. पण निष्कर्ष अतिशय महत्त्वाचे होते आणि ते कुठल्या अंतःप्रेरणेने त्याला सुचत हे एक न उलगडलेले कोडे आहे. त्याची स्मरणशक्ती अफाट होती आणि पूर्णांकांच्या विशेष गुणांवद्दल त्याला पुष्कळ माहिती असे. हार्डीचे सहकारी लिटिलवूड म्हणाले, "प्रत्येक घनात्मक पूर्णांक रामानुजन्ला वैयक्तिक मित्राप्रमाणे आहे." गणिती सूत्रांमधल्या खुब्या तो अचूक हेरून काढी.

हार्डीनी रामानुजन्ला उजेडात आणले. अगदी अलिकडे सापडलेल्या रामानुजन्च्या कागदपत्रांचा अभ्यास करणारे गणितज्ञ म्हणतात की, रामानुजन्च्या काही खुब्या हार्डीलाही पूर्ण कळल्या नव्हत्या!

भारतीय गणिताची परंपरा-

आतापर्यन्तच्या अहवालात रामानुजन् सोडल्यास भारतीयांचा अभाव खचित जाणवतो. खुद्द रामानुजन्चे मूल्यमापन झाले तेही पाश्चात्य पार्श्वभूमीवर. भारताने गणिताच्या विकासात किती आणि केव्हां भर टाकली?

ह्या प्रश्नाचे उत्तर शोधताना दोन गोष्टी जाणवतात. एक म्हणजे विश्वसनीय लेखी पुराव्याचा अभाव. भारतीय संस्कृती ख्रिस्तपूर्व २००० वर्षे विकसित अवस्थेत होती असे जरी मानले तरी गणिताबद्दलची विधाने पुष्कळ उशीराच्या काळातली सापडतात. शल्भसूत्राचा काळ ख्रिस्तपूर्व ८०० ते ईसवी सन २०० पर्यन्त घरला तर त्यांत प्राथमिक स्वरूपाचे गणित सापडते. १ ते ९ अंक सापडतात पण शून्याला स्थान नाही. $\sqrt{2}$ चे मूल्य दिले आहे पण ते पूर्ण बरोबर नसून जवळजवळ बरोबर असल्याची नोंद नाही. पायथॅगोरसचे प्रमेय आणि इतर काही भूमितीय विधाने आहेत.

तिसऱ्या शतकापासून ते तेराव्या शतकापर्यन्त मात्र गणिताचा, विशेषकरून अंकगणित आणि बीजगणिताचा बराच विकास भारतात झाला. शून्याचा

शोध, ऋणात्मक संख्यांच्या अस्तित्वाची जाण दशांश पद्धतीचा वापर ह्या गोष्टी त्या काळच्या गणिताच्या जागतिक विकासाच्या पार्श्वभूमीवर उठून दिसतात. आर्यभट (पाचवे शतक) खगोलशास्त्रासाठी त्रिकोणमीती वापरीत असे. भास्कराचार्यांचे ग्रंथ (वारावे शतक) अंकगणित, बीजगणित आणि त्रिकोणमीतीची चांगली जाण दाखवतात. भास्कराचार्यांच्या 'लीलावती' ग्रंथात उत्तम गणितीय उदाहरणे दिली आहेत. एक नमूना पहा :

अस्ति स्तंभतले विलं तदुपरि क्रीडाशिखंडी स्थितः ।
स्तंभे हस्तनवोच्छिते त्रिगुणित स्तंभ प्रमाणांतरे ।।
दृष्ट्वाहि त्रिलमात्रजंतमपतत् तिर्यक् स तस्योदरि ।
क्षिप्रं ब्रूहि तयोर्विलात्कति मितेः साम्येन गत्योर्युतिः ।।

अर्थ :- एका खांब्याखाली सापाचे बीळ होते व खांब्याच्या वरच्या टोकावर एक पाळलेला मोर बसला होता खांब ९ हात उंच होता व त्याच्या तिप्पट अंतरावरून एक साप बिळाकडे जाताना मोराने पाहिला. त्याने सर्पाच्याच गतीने तिरप्या दिशेत झेप टाकून बिळापासून काही अंतरावर त्याला पकडले. तर हे अंतर किती ते झटपट सांग.

परंतु वर उपस्थित केलेल्या प्रश्नाच्या सदर्भात दुसरी गोष्ट जाणवते आणि खटकते ती ही वाराव्या शतकापर्यन्त गणितात बराच पुढे गेलेला आपला देश मागे का पडला? भास्कराचार्य ते रामानुजन् ह्या सात शतकात आपली गणिती परंपरा खंडित का झाली?

अलबिरुनी (९७३-१०४८) ह्या फारसी इतिहासकाराने भारतीय गणितावद्दल काढलेले उद्-गार बरेच भेदक आहेत. " भारतीय गणित आणि खगोलशास्त्र म्हणजे मोत्याची शिपले आणि आंबट खजूर यांचे मिश्रण वाटते किंवा मोती आणि चिखल, बहुमोल खडे आणि दगड-धोंडे यांचे मिश्रण वाटते. त्यांचा उपयोग करणारांना त्यांच्यातला फरक कळत नाही. कारण ज्या वैज्ञानिक पातळीतून हे

फरक समजतात ती पातळी त्यांनी गाठलेली दिसत नाही.

हा नीरक्षीर विवेक न जमल्यामुळे आर्यभट आणि भास्कराचार्यांनी विकसित केलेले खगोल शास्त्र पुढे फलज्योतिषाच्या दिशेने वळले. विज्ञानाच्या बाबतीत असे म्हणता येईल की, अल्पसंतुष्ट वृत्तीमुळे स्वतःची परिस्थिती सुधारण्याकरता विज्ञानाचा विकास करण्याची इच्छाच भारतीयांना झाली नाही. पण गणिताचे काय? गणित स्वतःला अमूर्त आणि परिस्थितीपासून अलिप्त समजते. आधुनिक शुद्ध गणितज्ञांचा दावा आहे की केवळ विचार-शक्तीच्या जोरावर गणिताचा विकास होतो आणि काहीही उपयोग (विज्ञानाला, तंत्रज्ञानाला) झाला नाही तरी बेहतर, ते एक कलाकृती म्हणून पुढे येईल. मग चिंतनशील भारतीयांना ते का साध्य झाले नाही?

कारण वरील विधान अर्धसत्य असून त्यामागे किंचित् अहंमन्यतेची भावना आहे. गणितज्ञ कितीही अलिप्त असला तरी त्यावर आसपासच्या परिस्थितीचा प्रभाव पडतोच युरोपमध्ये गणिताचा विकास झाला तो विज्ञानाच्या खांद्याला खांदा लावून. आर्किमिडीस, न्यूटन, फर्मा, गाडस्... ही परंपरा निर्माण झाली आणि अखंडित राहिली ती याच कारणामुळे आणि

याच कारणामुळे विज्ञानाची कास मोडल्यावर अमूर्त चिंतनशील भारतीय गणिताचाही विकास करू शकले नाहीत.

भविष्याकडे

भारतीय गणित आज पुन्हा डोके वर काढत आहे पाश्चात्य प्रवाहात सामील होऊन भारतीय गणितीदेखील महत्त्वाची कामगिरी बजावत आहेत पण वास्तविक परिस्थिती तितकीशी आशादायक नाही. याचे कारण गणिताची खरी आवड असलेले प्रज्ञावंत विद्यार्थी गणित सोडून तंत्रशास्त्र आणि वाणिज्य ह्या विषयांकडे आकर्षित जात आहेत. दोष त्यांचा नव्हे समाजाचा आहे. गणिताच्या उच्च शिक्षणाला आणि संशोधनाला जोपर्यंत पुरेसा वाव मिळत नाही, पुरेसा पैसा आणि कृतकृत्यता जोपर्यंत गणिताला वाहून घेतलेल्यांना लभात नाही तोपर्यंत हुशार विद्यार्थी गणिताची आवड असूनसुद्धा गणितापासून लांब जाणार किंवा जिथे अशी परिस्थिती त्यांना उपलब्ध होते अशा पाश्चात्य देशांकडे धाव घेणार.

अर्थात असे झाले तर नुकतीच पुन्हा सुरू झालेली गणिताची भारतीय परंपरा पुन्हा कुठित होणार.....

