

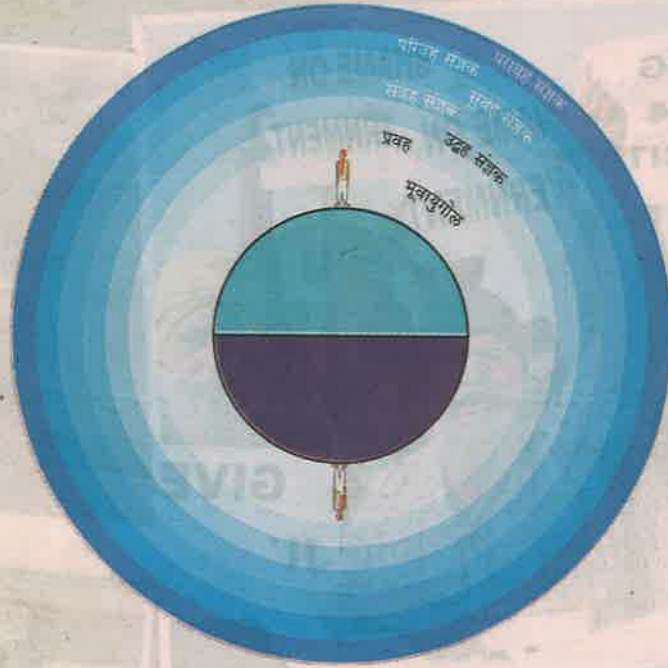


शब्दांचा अवकाश

जयंत नारळीकर

jayanit@iucaa.emet.in

आर्यभट ते भास्कराचार्य अशी थोर परंपरा भारताला खगोलविज्ञानात आणि गणितात आहे. असे किती तरी विद्वान पाचव्या शतकापासून ते अकराव्या शतकापर्यंत भारतात होऊन गेले. या विद्वानमालिकेतला अखेरचा मणी म्हणजे भास्कराचार्य द्वितीय. त्यांची ९०० वी जयंती गेल्या महिन्यात झाली. तीनिमित्त भास्कराचार्यांच्या कार्य-कर्तृत्वाचा हा परिचय...



भास्कराचार्य द्वितीय

भारतीय खगोलविज्ञान आणि गणित यांची परंपरा आर्यभट (पाचवें शतक) याच्यापासून सुरू होऊन भास्कराचार्य द्वितीय (१११४-११८५) याच्यापर्यंत पोचली. अबाधित परंपरा पोसणाऱ्या या कालखंडाला भारतातलं सुवर्णयुग म्हटलं, तर अतिशयोक्ती होणार नाही. जवळपासच्या शेजारी देशांच्या किंवा सुदूर पश्चिमेतल्या युरोपच्या तुलनेत भारत हा गणित आणि विज्ञान यांच्या अभ्यासात तेव्हा नक्कीच अग्रेसर होता. भारतातल्या विद्वानांनी लिहिलेल्या पुस्तकांचे अनुवाद अरबस्तानातल्या उत्साही अभ्यासकांनी प्रसिद्ध केल्यात. भारतीय ज्ञान इतरत्र माहीत झालं.

अशा या विद्वानमाळेतले काही चमकदार मणी होते : आर्यभट (१) - लटदेव - ब्रह्मगुप्त - भास्कर (१) - लल्ला - आर्यभट (२) - श्रीपती - भास्कर (२).

या माळेतला शेवटचा मणी म्हणजे भास्कर (२) किंवा ज्याला आपण भास्कराचार्य या नावानं ओळखतो तो! भास्कराचार्यांच्या पश्चात भारतात मुख्यत्वेकरून केरळात गणिती संशोधन होत राहिलं; पण अगदी अलीकडच्या काळापर्यंत त्या शोधांचं महत्त्व पूर्णपणे माहीत झालेलं नव्हतं. जानेवारी २०१४ मध्ये आयोजित भास्कराचार्यांच्या ९०० व्या जयंती समारंभानिमित्त त्यांच्या कार्याची थोडक्यात माहिती देण्याचा हा प्रयत्न आहे.

भास्कराचं जन्मस्थान जळगाव जिल्ह्यात चाळीसगावच्या नैर्ऋत्येला पाटणगावी असावं (पण याबाबतीत तज्ञांत एकमत नाही).

भास्कराचा मोठा ग्रंथ 'सिद्धान्तशिरोमणी' हा चार भागांत आहे; परंतु प्रत्येक भाग हाही एक स्वतंत्र ग्रंथच म्हणता येईल. त्या चार भागांची नावं : १) लीलावती (पाटी गणित), २) बीजगणित, ३) ग्रहगणिताध्याय आणि ४) गोलाध्याय.

'ग्रहगणिताध्याय' या खंडात ४ हजार ३४६ श्लोक असून, त्यांत ग्रहांसंबंधीचं व पंचांगाचं गणित आहे. सूर्य ज्या क्रांतिवृत्तावरून भ्रमण करतो, त्यात आणि विषुववृत्तामध्ये २३। आसांचा कोन असल्यामुळं भाष्य आणि स्पष्ट सूर्योदयात अंतर पडतं. त्याचं गणित गोलीय त्रिकोणमिती वापरून भास्कराचार्यांनं 'उदयांतर संस्कार' या मार्गानं सोडवलं.

'ग्रहगणिताध्याय'चं अधिक स्पष्टीकरण करण्यासाठी

त्यानं 'गोलाध्याय' हा चौथा ग्रंथ लिहिला. त्यात २ हजार १०० श्लोक आहेत. या ग्रंथाचा पुष्कळ प्रचार झाला आणि अनुवादांमुळं वेगवेगळ्या देशांत तो माहीत झाला आणि वापरात आला. भास्कराचार्य खगोलविज्ञानातल्या कामगिरीबद्दल प्रसिद्ध आहे व ती कामगिरी 'गोलाध्याय' वाचल्यावर किती महत्त्वाची होती, ते ध्यानात येतं.

'ग्रहगणिताध्याय'च्या सुरवातीलाच भास्कराचार्यांनं आपली विनोदबुद्धी दाखवली आहे. तो म्हणतो : "विद्वान वाचक या पुस्तकातल्या बुद्धिवर्धक चमत्कारांनी संतुष्ट होतील, तर दुर्जन लोकांना विषय न समजल्यामुळं तो हास्यापद वाटेल. अशा तऱ्हेनं विद्वान आणि मूर्ख अशा दोघांनाही हा विषय मनोरंजक वाटेल."

भास्कराचार्यांनं 'गोलाध्याय' या ग्रंथाच्या सुरवातीलाच गणित आणि खगोलशास्त्र यांचं एकत्र येणं का महत्त्वाचं आहे, याची चर्चा केली आहे. त्यानं आवर्जून म्हटलं आहे, की खगोलाची माहिती गणिताद्वारे मिळते आणि अशा माहितीशिवाय गणित हा एक नीरस विषय असेल. त्याचप्रमाणे जर खगोल-अभ्यासकाला गणित येत नसेल, तर तो एक 'मूर्ख' म्हणून ओळखला जाईल.

अशा प्रस्तावनेतून भास्करानं आपल्या चर्चेला सुरवात केली आहे. सुरवातीलाच त्यानं 'पृथ्वी गोल असून दक्षिण गोलार्धातली माणसं आपल्या विरुद्ध दिशेनं (वर-खाली) उभी असतात,' हे सांगितलं आहे. खुद्द पृथ्वीला गुंडाळणारे तिच्याभोवती वायूचे सात गोलाकार स्तर असतात. त्या सात स्तरांची नावं : १) भूवायुगोल, २) प्रवह, ३) उद्वहसंज्ञक, ४) संवहसंज्ञक, ५) सुवहसंज्ञक, ६) परिवहसंज्ञक, ७) परावहसंज्ञक.

आधुनिक माहितीप्रमाणे पृथ्वीच्या वायुमंडलाचे विविध स्तर निश्चित केले जातात. अर्थात भास्करानं वरील माहिती कशाच्या बळावर मिळवली, त्याची चर्चा केलेली नाही; तसंच (बहुतेक पुराणांतल्या वर्णनावरून) त्यानं असा निष्कर्ष काढला, की जमिनीपासून सुमारे १०० किलोमीटर उंचीवर पाण्याचे ढग, विजा, इंद्रधनुष्य, गंधर्वनगरी आणि विविध चित्रविचित्र गोष्टी सापडतात.

पण या प्राथमिक चर्चेतून एक गोष्ट स्पष्ट होते. मुळात पृथ्वी, इतर ग्रह, सूर्य आदी आकाशात भ्रमण करणाऱ्या गोष्टी स्वतःच्या दिमतीवर टिकून आहेत. उदाहरणार्थ : पृथ्वी! पूर्वीच्या विचारांप्रमाणे जर पृथ्वी चार दिगाजांवर ठेवलेली आहे,

असं मानलं तर ते हत्ती कशावर उभे आहेत? हत्तीच्या खाली कासव, तर कासवाच्या खाली काय? अशा तऱ्हेच्या तर्कांत अडकण्याऐवजी भास्करानं वेगळाच मार्ग निवडलाय.

त्या काळच्या बौद्ध तत्त्वज्ञानानुसार, पृथ्वी आकाशात सतत 'खाली' पडत असते, असं मानलं जाई. या मताचं खंडन करून, 'पृथ्वी आकाशात एका जागी स्थिर आहे,' असं प्रतिपादन करताना भास्करानं, पृथ्वीवर पडणाऱ्या एखाद्या दगडाचं उदाहरण दिलं आहे. दगड 'खाली' पडण्याच्या वेगापेक्षा पृथ्वी खाली पडण्याचा वेग बराच जास्त असल्यानं तो दगड पृथ्वीतलापर्यंत पोचेल कसा, हा प्रश्न भास्कराचार्यांनं उपस्थित केला. त्याच्या मते, पृथ्वी दगडाला आकर्षित करते, त्यामुळं दगड पृथ्वीवर पडतो; पण पृथ्वी स्वतः आपल्याजागी स्थिर असते.

यासंदर्भात गुरुत्वाकर्षणाच्या सिद्धान्ताच्या जनकत्वाचं श्रेय भास्कराचार्यांला द्यावं, असा एक मतप्रवाह आहे. त्याची इथं थोडक्यात दखल घेऊ. न्यूटननं सफरचंद पडलं म्हणून पृथ्वीच्या गुरुत्वाकर्षणाचा निष्कर्ष काढला, तसाच निष्कर्ष इथं भास्करानं काढलेला नाही काय, इथपर्यंत आपण दोन्ही उदाहरणां एका पातळीची मानू शकतो; पण न्यूटनला वास्तविक गुरुत्वाकर्षणाचा व्यस्तवर्गाचा नियम गवसला, तो केप्लरच्या ग्रहगतीच्या नियमांचं गणिती विश्लेषण करून. त्यासाठी त्यानं स्वतःच शोधलेल्या कलनशास्त्र (कॅल्क्युलस) या नव्या गणिती शाखेचा उपयोग केला; म्हणून गुरुत्वाकर्षणाच्या नियमाचं श्रेय न्यूटनला दिलं जातं, ते योग्यच आहे. अशा तऱ्हेचं गणिती विवेचन भास्कराच्या किंवा इतर कुणाच्या भारतीय विचारकांच्या ग्रंथात सापडत नाही.

मात्र, 'गोलाध्याय'चा प्रमुख भर आकाशातल्या ग्रह-ताऱ्यांच्या निरीक्षणासाठी वापरलेल्या गणितावर आहे. अमुक अक्षांश-रेखांश असलेल्या जागेतून अमुक वेळी निरीक्षण केल्यास तमुक ग्रह किंवा तारा कुठं सापडेल, अशा तऱ्हेचे प्रश्न इथं सोडवले आहेत. त्यासाठी भूमिती आणि गोलीय त्रिकोणमिती वापरली आहे. हा विषय कॅल्क्युलसपेक्षा जुना आणि म्हणून बहुतेक गणिती बहाहरांना परिचित होता.

त्या काळात पुस्तकं श्लोकबद्ध संस्कृतात लिहिली जात. अशा स्थितीत चित्रांशिवाय लिहिलेलं वर्णन समजणं सोपं नव्हतं; म्हणून 'टीका'च्या माध्यमातून लेखक स्वतः (किंवा अन्य टीकाकार) श्लोकांचं विवेचन करत. अशा टीकेत आधुनिक

गणितात वापरतात, तशा आकृत्या आणि उदाहरणं वापरून लेखनाचा अर्थ विशद केला जात असे. 'गोलाध्याय'तसुद्धा ही पद्धत दिसते.

'गोलाध्याय'मधलं एक प्रकरण सर्वस्वी यंत्रांना, म्हणजे निरीक्षणाच्या उपकरणांना, वाहिलेलं आहे. त्यात काल मोजणारी उपकरणं आहेत. चक्रयंत्र, अर्धचापयंत्र, तुरीययंत्र, फलकयंत्र, यष्टियंत्र आदींची चर्चा पाहून भास्कराचार्य प्रत्यक्ष निरीक्षणांनदेखील महत्त्व देत असे, याची जाणीव होते. ही यंत्रं कशी बनवायची आणि कशी वापरायची, याची चर्चा या प्रकरणात आढळते.

'ग्रहणवासना' या अध्यायात ग्रहणांची चर्चा करताना सूर्यग्रहण आणि चंद्रग्रहण यांच्या स्पर्शादिशा आणि मोक्षदिशा कुठं असतात आणि का असतात, यांची कारणमीमांसा करण्यात आली आहे. सूर्यग्रहणात पश्चिम दिशेत स्पर्श तर पूर्वेत मोक्ष होतो, तर चंद्रग्रहणात याच्या उलट स्थिती असते. याची चर्चा करताना भास्कराचार्य राहू-केतूची संकल्पना खोडून काढतो; पण वेद-पुराण आदींमधल्या विश्वासांना तडा जाऊ नये म्हणून आपला निष्कर्ष अनानुक्रमिक शब्दांत व्यक्त करतो!

सूर्य ज्या मार्गानं जातो, ते क्रांतिवृत्त आणि त्यानं विषुववृत्ताशी केलेला कोन यांचा एक परिणाम म्हणजे दिवस आणि रात्र यांच्या कालखंडात फरक पडतो. त्यामुळं सूर्य विषुववृत्ताच्या उत्तरेला असला तर उत्तर गोलार्धात रात्रीपेक्षा दिवस लांब, तर दक्षिण गोलार्धात

त्याउलट स्थिती असते. त्रिकोणमितीनं या गोष्टीचा उलगाडा होऊ शकतो, हे भास्कराचार्यांनं दाखवून दिलं आहे.

याचाच परिणाम म्हणून ६६ अंश अक्षांशाच्या उत्तरेला काही काळ मध्यरात्री आकाशात सूर्य दिसतो (उन्हाळी महिन्यात), तर असाही काळ असतो, की जेव्हा दिवस सूर्यदर्शनाशिवाय जातो (थंडीच्या मोसमात). याचं कारणही वरील गणिताद्वारे देता येतं, हे भास्कराचार्य समजावून सांगतो.

भास्कराचा पिंड शिक्षकाचा आहे, याची जाणीव 'गोलाध्याय' वाचताना पदोपदी होते. कारण, ठिकठिकाणी त्यानं प्रश्न पेरले आहेत व उत्तरं दिली आहेत. शेवटचा 'प्रश्नाध्याय' तर प्रश्नांनीच व्यापलेला आहे. मला वाटतं, की त्याची ही पद्धत आधुनिक गणित आणि विज्ञान यांना वाहिलेल्या पाठ्यपुस्तकांनी वापरण्याजोगी आहे.

भास्कराचार्यांचं गणितावरचं कार्यही प्रगल्भ आहे. 'लीलावती' या ग्रंथात भूमिती, बीजगणित व अंकगणिताचा सुंदर संगम दिसतो. अशा विषयांवर आधारित गणितं मनोरंजक आहेत.

एक उदाहरण पाहा : मधमाश्यांच्या समूहाच्या निम्म्या संख्येच्या वर्गामुळाइतक्या संख्येनं एक थवा मालती वृक्षाकडं गेला. त्यांच्या पाठोपाठ एकूण संख्येच्या आठ नवमांशा माशाही तिकडं गेल्या. एक नरमाशी कमळाच्या बंद पाकळ्यांत अडकून पडली, तर फुलाबाहेर तिची जोडीदार तिच्या आवाजाला प्रतिसाद देत उडत होती...तर मुली, सांग एकंदर किती माश्या होत्या?

(भास्करानं हा ग्रंथ गणितात हुशार असलेल्या आपल्या कऱ्येला - लीलावती हिला - उद्देशून लिहिला होता, असा एक समज आहे).

भास्करानं अनेक गणिती शोध लावले. चक्रवाल पद्धत वापरून त्यानं विशिष्ट प्रकारची गणिती समीकरणं सोडवून दाखवली. उदाहरणार्थ: $६१X^2 + १ = Y^2$ हे पूर्णांक X, Y साठी कसे सोडवणार, हा प्रश्न १६५७ मध्ये फर्मा नावाच्या फ्रेंच गणितज्ञानं उपस्थित केला होता. अनेकांनी प्रयत्न केले आणि अखेर १७३२ मध्ये ऑयलर या प्रख्यात गणितज्ञानं तो सोडवला; पण अलीकडं असं लक्षात आलं आहे, की हा प्रश्न भास्कराचार्यांनं ११५० मध्येच सोडवला होता! चक्रवाल पद्धत वापरून त्यानं काढलेलं उत्तर :

$$X = २२६१५३९८०, Y = १७६६३९०४९$$

या उदाहरणातून भास्कराच्या कर्तृत्वाची कल्पना येते.