

# गणितातल्या गमती जमती

(१) अंका गृहस्थाने आपल्या घराभोवती गोल भिंत बांधली आणि त्या भिंतीत बाहेर पाहायला खिडक्या केल्या. पण गंमत अशी की कुठल्याही खिडकीतून बाहेर पाहिले, की त्याला दक्षिण दिशा दिसे. त्याचे घर कुठे होते ?

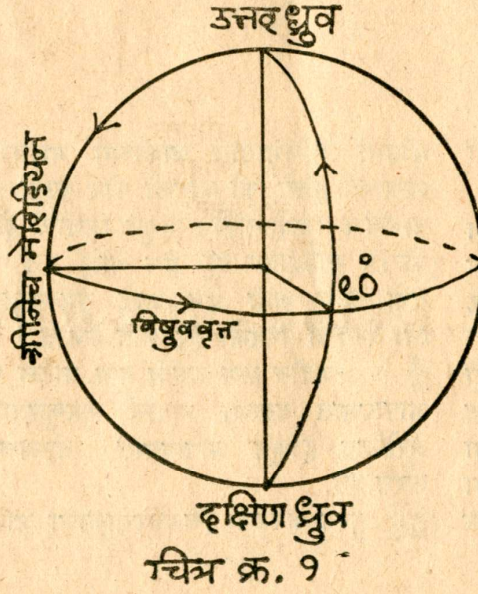
(२) अंक गृहस्थ आपल्या घरातून निघून सरळ दिशेने अंक मंल चालत गेला. त्याच्या लक्षात आले, की आपण दक्षिणेकडे जात आहोत. मग दिशा बदलून तो मंलभर पश्चिमेकडे गेला आणि परत दिशा बदलून मंलभर उत्तरेकडे चालत आला — तो थेट आपल्या घरीच पोचला ! त्याचे घर कुठे होते ?

ह्या दोन्ही प्रश्नांचे अंकच उत्तर आहे : त्या गृहस्थाचे घर उत्तर ध्रुवावर होते.

ह्यावरून असा ग्रह होण्याचा संभव आहे, की उत्तर ध्रुवात काहीतरी वैशिष्ट्य आहे.

पृथ्वी बरोबर गोलाकार आहे असे गृहीत धरले (वस्तुस्थिती तशी नाही ह्या तपशिलाशी आपल्याला येथे कर्तव्य नाही) तर त्यावरील प्रत्येक बिंदू सारखाच. वरील कोड्यांत उत्तर ध्रुवाला महत्त्व प्राप्त होते. कारण आपण उत्तर-दक्षिण वगैरे दिशा ठरवायला उत्तर ध्रुव कोणीकडे आहे ह्याची दखल घेतो. पृथ्वी दोन्ही ध्रुवांना जोडणाऱ्या अक्षाभोवती फिरते, म्हणून आकाशातले तारामंडळ फिरताना दिसते — फक्त अक्षाच्या दिशेने उत्तरेकडे असलेला ध्रुवतारा स्थिर असलेला दिसून येतो. ह्याच ध्रुवताराच्या मदतीने समुद्रावरचे खलाशी दिशा ठरवू लागले. . .

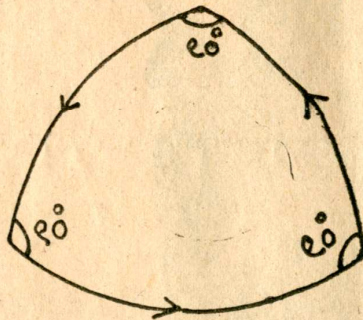
पण जर पृथ्वी अक्षाभोवती फिरत नसती तर कुठलेही (पृथ्वीच्या केंद्रातून काढलेल्या) व्यासाच्या टोकावरचे दोन बिंदू आपल्याला ध्रुव म्हणून गृहीत धरून अक्षांश-रेखांश काढता आले असते. आणि पृथ्वीच्या पृष्ठभागावर दिशा ठरवता आल्या असाव्या.



चित्र क्र. १

## पृथ्वीच्या पृष्ठभागावरची भूमिती

चित्र क्रमांक १ मध्ये पृथ्वीच्या पृष्ठभागाची गोलाकार आकृती दाखवली



चित्र क्र. २

आहे. समजा, अंक गृहस्थ उत्तर ध्रुवावरून ग्रीनिच मेरिडियन (0° चा रेखांश) वरून दक्षिणेकडे निघाला. सरळ (दिशा न बदलता) प्रवास करून तो अखेरीस विषुववृत्तापर्यंत पोचला. तेथे तो दिशा बदलून पूर्वेकडे निघाला.

विषुववृत्तावरून सरळ जाऊन शेवटी तो ९०° च्या रेखांशावर पोचला आणि तेथे त्याने पूर्वेपासून उत्तरेकडे मोर्चा वळवला. ह्या रेखांशावरून सरळ जाऊन तो शेवटी परत उत्तर ध्रुवावरच जाऊन थडकेल. मात्र त्याची परत येण्याची दिशा त्याच्या निघण्याच्या दिशेशी काटकोन करून असेल.

त्याचा मार्ग चित्र क्र. २ मध्ये दाखवला आहे. त्याच्या मते तो तीन वेळा सरळ रेखांतून गेला (दिशा न बदलता) पण त्याने आखलेला त्रिकोण गमतीदार आहे. त्याचे तीनही कोन काटकोनाचे आहेत. म्हणजे त्या त्रिकोणाच्या तीन कोनांची बेरीज २७०° भरते !

## नवीन भूमितीचे नियम

वरील अुदाहरणावरून असे सिद्ध होते की पृथ्वीच्या पृष्ठभागावर काढलेले त्रिकोण युक्लिडच्या भूमितीचे नियम पाळत नाहीत. आपण शाळेत शिकतो ती भूमिती युक्लिड ह्या ग्रीक गणितज्ञाने सुमारे दोन हजार वर्षांपूर्वी शोधून काढली. त्या भूमितीत काही गोष्टी स्वयंसिद्ध

----- क -----

अ-----ब

## चित्र क्रमांक ३

म्हणून गृहीत धरल्या आहेत. त्या 'खऱ्या' समजून त्यावर प्रमेये आधारली असून ती सिद्ध करताना तर्कशास्त्राचा वापर केला जातो. ह्या युक्लिडच्या भूमितीतले प्रमेयच आपल्याला सांगते की प्रत्येक त्रिकोणाच्या तीन कोनांची बेरीज १८०° भरते.

मग चि. क्र. २ मधला त्रिकोण कुठल्या भूमितीत बसतो ? पृथ्वीचा पृष्ठभाग सपाट नसल्याने तेथे युक्लिडच्या भूमितीचे नियम लागू पडत नाहीत. तिथल्या भूमितीला 'अयुक्लिडीय' भूमिती म्हणू या.

(पान ६९ वर)

क मधून अब च्या समांतर कित्ती रेषा काढता येतील ?

युक्लिडने गृहीत धरले की चि. क्र. ३ मध्ये दाखवल्याप्रमाणे अेक आणि अेकच रेषा अब च्या समांतर काढता येतील.

युक्लिडनंतरच्या अनेक गणितज्ञांनी हे गृहीत न धरता अितर युक्लिडच्या गृहीतकांच्या आधारे हा नियम प्रमेय म्हणून सिद्ध करण्याचा पुष्कळ प्रयत्न केला. पण त्यांना यश आले नाही.

शेवटी काही शास्त्रज्ञांनी (लोबॅ-च्युस्की, गाअुस, रीमान अि.) वेगळेच पर्याय गृहीत धरून पाहिले : (१) क मधून अब च्या समांतर अेक ही रेषा काढता येणार नाही; (२) क मधून अबच्या समांतर दोन किंवा अधिक रेषा काढता येतील.

आणि त्यांना जाणीव झाली की दोन्ही पर्याय नवीन अचूक भूमित्या निर्माण करतात. पहिला पर्याय पृथ्वीतलावरच्या अयुक्लिडीय भूमितीला लागू पडतो.