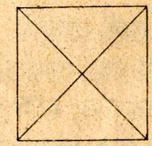
गणितातील गमतीजमती

सात पूल आणि दोरीची गाठ

खालील आकृती पेन्सिलीने गिरवता येईल काय ? मात्र पेन्सिल अेकदा त्या आकृतीवर टिकवली की अुचलायची नाही आणि कुठलीही रेषा दोनदा गिरवायची नाही– अशी अट. लेखांक १ मध्ये हा प्रश्न विचारला होता.



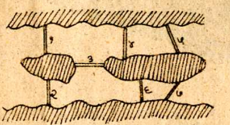
चित्र क्रमांक– १

या प्रश्नाचे अुत्तर असे आहे की, अशा तऱ्हेने ही आकृती गिरवणे शक्य नाही !

हे विधान गणिताने सिद्ध करता येते– पण ते प्रमेय अवघड आहे. तरी त्या मागचा अितिहास मनोरंजक आहे. तो असा :

कोनिग्सबर्गचे सात पूल

युरोपच्या नव्हे, पण गणिताच्या अितिहासात गाजलेले अेक लहानसे गाव 'कोनिग्सबर्ग.' तेथे नदी होती आणि तिच्यावर सात पूल होते. हे पूल त्या नदीतल्या दोन बेटांना आणि दोन्ही तीरांना अेकमेकांशी जोडत होते. त्यांची रचना चित्र क्रमांक २ मध्ये दाखवली आहे.



चित्र क्रमांक २

ह्या सर्व पुलांवरून अेकदा आणि फक्त अेकदाच चालत जाता येईल काय ? अनेकांनी प्रयत्न केला, पण त्यांना ते जमले नाही. मग ही गोष्ट अशक्य समजावी का ? कोनिग्सबर्गला भेट देणाऱ्या अनेक विद्वानांना हा प्रश्न विचारून गावकरी दमले. अखेर त्या प्रश्नाचे समाधानकारक अुत्तर ऑयलर नावाच्या प्रख्यात गणितज्ञाने दिले. हे अुत्तर शोधायला ऑयलरलासुद्धा पुष्कळ डोके खाजवावे लागले. पण शेवटी त्याने शोधून काढलेला नियम कोनिग्सबर्गच्या सात पुलांनाच लागू होत नव्हता, तर त्याशिवाय अितरही अनेक प्रश्नांची अुत्तरे देअू शकत होता. अुदाहरणार्थ चि. क्र. १ मधल्या आकृतीलाही तो लागू पडत होता.

मग कोनिग्सबर्गच्या गावकऱ्यांना ऑयलरने काय अुत्तर दिले ?

ऑयलरचा नियम

प्रथम आपण ऑयलरचा नियम समजावून घेअू. चि. क्र. १ मधल्या आकृतीत काही बिंदू असे आहेत जिथे अनेक रेषा येअून मिळतात. अशा बिंदूंना आपण 'ठिकाण' म्हणू आणि दोन ठिकाणांना जोडणाऱ्या रेषांना 'पूल' म्हणू. चित्रांत दाखवल्याप्रमाणे चार ठिकाणे (आकृतीतल्या ४ टोकांना) अशी आहेत, जेथून प्रत्येकी तीन पूल सुरू होतात आणि अेक ठिकाण असे आहे (मध्यावर) जेथून चार पूल निघतात. पेन्सिलीने आकृती गिरवणे आणि पुलावरून पायी जाणे ही सारखीच क्रिया आहे हे ह्या प्रश्नांच्या संदर्भात आपल्या लक्षात आले असेलच. त्याचप्रमाणे 'ठिकाण' हे चि. क्र. १ प्रमाणे बिंदुवत् असले काय किंवा चि. क्र. २ मधल्या बेटांप्रमाणे (आणि तीरांप्रमाणे) पसरलेले असले काय, त्याचा ह्या प्रश्नांच्या अुत्तराशी संबंध येत नाही. मात्र दोन्ही आकृत्यांत ठिकाणांची आणि पुलांची रचना वेगळी आहे. आता ऑयलरचा नियम असा :

कुठल्याही आकृतीत अशी किती ठिकाणे आहेत जेथून विषम संख्येने (म्हणजे २ ने भाग न जाणाऱ्या संख्येने) पूल निघतात, याची नोंद करा. जर ती संख्या २ पेक्षा जास्त असेल तर ती आकृती गिरवणे (दिलेल्या नियमाप्रमाणे) शक्य नाही. जर ती संख्या २ असेल तर हे शक्य आहे, मात्र गिरवण्याला सुरवात अशा ठिकाणापासून केली पाहिजे, जेथून विषम संख्येने पूल निघतात. जर ही संख्या २ पेक्षा कमी असेल तर ही आकृती कुठूनही सुरू केल्यास गिरवता येईल. आता हा नियम वापरूया. आपण नुकतेच पाहिले की चि. क्र. १ मधल्या आकृतीत अशी चार ठिकाणे आहेत जेथून तीन (म्हणजे विषम संख्येने) पूल निघतात. म्हणून ही आकृती गिरवता येणार नाही.

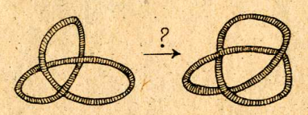
हाच नियम कोनिग्सबर्गच्या पुलांच्या आकृतीला लावून पाहा म्हणजे ऑयलरने गावकऱ्यांना काय अुत्तर दिले असेल याची कल्पना येईल !

दोऱ्यांच्या गाठी आणि गुंतागुंती

वर नमूद केलेला भाग गेल्या लेखांकात सांगितलेल्या संस्थिती (टॉपॉलॉजी) ह्या गणिताच्या शाखेत बसतो. आता संस्थितीतले अेक वेगळे अुदाहरण बघा.

दोऱ्यांच्या काही गाठी सुटतात तर काही सुटत नाहीत. काही गुंतागुंती सोडवायला लागलो की त्यांचे दुसऱ्या गुंतागुंतीत रूपांतर होते. तर कधीकधी दोरीला गाठ नसून नुसता पीळ गेलेला असतो. ह्या सर्व प्रकारांचा सांगोपांग अभ्यास संस्थितीत केला जातो. सोपे वाटणारे काही प्रश्न गहन असतात हे अितेसुद्धा दिसून आले आहे.

अुदाहरणार्थ, चित्र क्रमांक ३ मध्ये दाखवलेल्या दोन गाठींचे अेकमेकीत रूपांतर होअू शकेल का ? पाहा प्रयत्न करून !

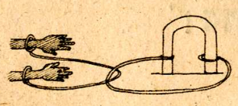


चित्र क्रमांक ३

दोन्ही गाठी अेकमेकींची आरशातली प्रतिबिंबे आहेत. जरी दिसायला त्यांची रचना सारखी दिसली तरी प्रत्यक्षात हे रूपांतर शक्य नाही हे गणिताद्वारे सांगता येते.

सोडवा हे कोडे

मुले पळविणाऱ्या अेका दरोडेखोराने अेका दहा वर्षांच्या मुलाला पळवून आणून चित्र क्रमांक ४ मध्ये दाखवल्याप्रमाणे दोन खांबांना अडकवून ठेवले. दोरी मजबूत, न तुटणारी होती व मुलाचे हातही त्याभोवतीच्या कड्यातून बाहेर निघू शकत नव्हते. दरोडेखोर निर्धास्तपणे बाहेर गेला. तो परत आला तेव्हा मुलगा पळून केलेला होता.



चित्र क्रमांक ४

हे कसे शक्य झाले ? (वाचकांनी अुत्तर कळवावे. योग्य अुत्तर देणाऱ्यांची नावे प्रसिद्ध करण्यात येतील.–संपादक).

–जयंत नारळीकर