गणितातल्या गमतीजमती

ओलीसुकी

जेव्हा दोन पर्याय समोर असतात आणि कुठला निवडावा यासाठी निर्णायक कारण अुपलब्ध नसते तेव्हा चिठ्ठ्या टाकणे किंवा नाणेफेक अशा अुपायांचा अवलंब केला जातो. अशा अुपायांमागे अभिप्रेत असते समान संभाव्यता (Equal Probability) अुदाहरणार्थ, नाणे व्यवस्थित फेकले की ते हवेत फिरून खाली पडताना 'हेड वर' का 'टेल वर' पडेल ते सांगता येत नाही– दोन्ही पर्याय सारखेच संभवनीय असतात. ही संभाव्यता गणितात मोजता येते. त्यासाठी केलेले नियम ह्या अुदाहरणाने सांगता येतील.

जी घटना निश्चित घडणार तिची संभाव्यता १ (अेक) अितकी धरली जाते. नाणेफेकीत नाणे खाली पडणार ह्या घटनेची संभाव्यता १ आहे. आता त्या घटनेचे पृथक्करण केल्यास तिचे दोन पर्याय म्हणजे, 'नाणे हेड वर असलेल्या परिस्थितीत खाली पडले' आणि 'नाणे टेल वर असलेल्या परिस्थितीत खाली पडले' असे दिसून येते. त्यांची संभाव्यता सारखी हे आपण आधीच पाहिले. शिवाय हे परस्पराला वगळणारे आहेत (हेड वर आणि टेल वर अेकदम घडणार नाही). म्हणून त्यांच्या संभाव्यतांची बेरीज केल्यास ती मूळ घटनेच्या ('नाणे खाली पडले') संभाव्यतेअितकी झाली पाहिजे. त्यावरून प्रत्येक पर्यायाची संभाव्यता १/२ (अर्धी) आहे हे दिसून येते.

ही संभाव्यता (किंवा कुठल्याही घटनेची संभाव्यता) मोजायला प्रयोग पण करता येअील. जर नाणे १०० वेळा फेकले तर 'हेड वर' असे किती वेळा पडले याची नोंद केल्यास ते– १०० च्या जवळजवळ अर्धी संख्या, म्हणजे ५० वेळा– असे दिसून येअील. आपण हेड वर आले की प्रयोग यशस्वी झाला असे म्हटले तर यशस्वी प्रयोगांचे प्रमाण १/२ च्या आसपास असेल. हा प्रयोग जितक्या जास्त वेळा केला जाअील तितक्या अधिक आत्मविश्वासाने हे प्रमाण १/२ च्या अधिक जवळ असल्याचे भाकीत संख्याशास्त्रज्ञ करू शकतो. म्हणजे १०० पेक्षा १००० वेळा हा प्रयोग केलात तर यशस्वी प्रयोगांचे प्रमाण १/२ च्या अधिक निकट असलेले आढळून येअील.

यादृच्छिकता (Randomness)

वरील प्रयोगात असे गृहीत धरले की नाणे फेकणाऱ्याने ते नाणे 'व्यवस्थित' फेकले. याचा अर्थ फेकल्यावर ते कसे पडेल यावर त्याचे काही नियंत्रण राहणार नाही. आपल्याला पाहिजे तसे पडेल अशा बेताने नाणे टाकल्यास अर्थातच वरील भाकीत बरोबर येणार नाही.

खेळातला घनाकृती फासा अेका डब्यात घालून हलवून फेकला की तो कसा पडेल हे सांगता येणार नाही. म्हणजे त्याच्या ६ पैकी कुठलाही पृष्ठभाग वर असण्याची शक्यता आहे. म्हणून अमूक अेक पृष्ठभाग वर येण्याची संभाव्यता १/६ (अेक षष्ठांश) अितकी आहे. अशा तऱ्हेच्या घटनेला 'यादृच्छिक घटना' (Random Event) असे संख्याशास्त्रात म्हटले आहे.

याचे आणखी अेक अुदाहरण पाहू. चार दारुडे अेका गुत्त्यात शिरले. आत शिरताना त्यांनी आपापली टोपी क्लोकरूममध्ये ठेवली. दारू पिअून, झिंगून आल्यावर त्यांनी आपापल्या टोप्या घेण्याचा प्रयत्न केला. पण बुद्धी ठिकाणावर नसल्याने मिळेल ती टोपी स्वतःची समजून घेतली. ही निवडण्याची पद्धत यादृच्छिक म्हटली पाहिजे! तर प्रश्न असा, की कोणालाही स्वतःची टोपी मिळू नये असे घडण्याची संभाव्यता किती?

चार लोकांना चार टोप्या किती वेगवेगळ्या तऱ्हेने वाटता येतील? थोडा विचार केल्यास ही संख्या ४ × ३ × २ × १ = २४ अितकी आहे हे दिसून येअील. आपण दारुडयांना नंबराने ओळखू : १, २, ३, ४ आणि त्यांच्या टोप्यांना त्यांचेच नंबर देअू. मग दारुडयांचे नंबर वर आणि खाली टोप्यांचे असे अेक टेबल तयार करता येअील.

दारुडे :	१	२	३	४
टोप्या	१	२	३	४
	१	३	४	२
	१	४	२	३

अित्यादी ....

ह्या तक्त्यात टोप्यांच्या वरीलप्रमाणे २४ प्रवेशिका (अेंट्रीज) असतील (वर फक्त ३ दिल्या आहेत). अशा किती प्रवेशिका आहेत ज्यात कुठल्याही दारुडयाखाली त्या नंबराची टोपी नाही. पाहा सोजून! अुत्तर आहे ९. म्हणजे असे घडण्याची संभाव्यता आहे ९/२४ म्हणजे ३/८.

बफाँचा 'सुअीचा प्रश्न'

बफाँ (Buffon) नावाच्या गणितज्ज्ञाने अेक गमतीदार प्रश्न तयार केला त्याचे थोडक्यात विवरण देत आहे.

चित्रात दाखविल्याप्रमाणे अेका मोठ्या कागदावर, ठराविक अंतरावर समांतर रेघा मारा. दोन शेजारच्या रेघांच्या मधल्या अंतराच्या निम्म्या लांबीची अेक बारीक सुअी किंवा काडी घ्या. आणि नाणेफेकीप्रमाणे– यादृच्छिक पद्धतीने – म्हणजे सुअी कशी पडावी अिकडे लक्ष न देता, ती सुअी फेका. ती सुअी कागदावर पडली की अेखाद्या रेघेवर तरी पडेल किंवा दोन रेघांच्या मधल्या भागात अलगद पडेल. तर ही सुअी रेघेवर (कुठल्याही) पडण्याची संभाव्यता काय?

ह्या प्रश्नाचे अुत्तर काढणे गणिताने अवघड असले तरी प्रत्यक्ष अुत्तर आहे कळायला सोपे. ते म्हणजे १/π. π हा आकडा आपल्या परिचयाचा आहे. अेखाद्या वृत्ताचे परिघ त्याच्या व्यासाच्या π –पट असते. π जवळजवळ २२/७ अितका आहे.

वुल्फ नावाच्या गणितज्ज्ञाने १८४९ ते १८५३ च्या काळात प्रयोग करून पाहिले. ५००० वेळा सुअी फेकून त्याने किती प्रमाणात ती अखाद्या रेघेवर पडते ते पाहिले. त्यावरून त्याने π म्हणजे जवळजवळ ३.१५९६ असा निष्कर्ष काढला. तो π च्या वास्तविक मूल्याच्या पुष्कळच जवळ आहे.

ज्यांना रिकामा वेळ असेल त्यांनी हा प्रयोग करून पाहावा!

—डॉ. जयंत नारळीकर