गणितातल्या गमती जमती

अुत्तर सापडले ?

या सदराच्या लेखांक १ मध्ये (किर्लोस्कर, ऑगस्ट ७६) अेक कूट प्रश्न दिला होता : अेका कागदावर अनेक देश असलेला नकाशा रंगवायला कमीत कमी किती रंग पुरतील ? शेजार-शेजारचे देश म्हणजे ज्यांची सीमारेषा काही भागात अेकरूप होते असे– वेगळ्या रंगाने रंगवणे आवश्यक आहे.

पाच रंग हे काम करायला पुरे आहेत. पण चारच रंग पुरतील का ? हा गणितज्ञांना कित्येक दशके सतावणारा प्रश्न अखेर सुटला असे दिसते ! आणि प्रश्नाचे अुत्तर 'होय' असे आहे.

हे अुत्तर नुकतेच अिलिनॉय युनिव्हर्सिटीच्या हाकन (Haken) आणि आपेल (Appel) ह्या गणितज्ज्ञांनी शोधून काढले. त्यासाठी त्यांना कंप्यूटरचा आसरा घ्यायला लागला. कंप्यूटरने हे गणित सोडवायला १२०० तासांचा अवधी घेतला. (किर्लोस्करच्या दिवाळी अंकात 'यक्षाची देणगी' ह्या विज्ञानकथेत 'फोर कलर प्रॉब्लेम' कंप्यूटरने सोडवण्याची शक्यता दर्शवण्यात आली होती !)

कुठलेही गणित– लहान किंवा मोठे– सोडवताना मानवी मेंदूला 'होय', 'नाही' अशा प्रकाराचे अनेक तर्कसंगत निर्णय घ्यावे लागतात. आपेल आणि हाकन ह्यांनी हाती घेतलेल्या गणितात असे दहा अब्ज निर्णय घ्यावे लागणार होते ! म्हणून कंप्यूटरची आवश्यकता भासली.

ह्या प्रश्नाचे ह्याहून सुटसुटीत असे अुत्तर सापडेल असेही काही गणितज्ज्ञांना वाटते.

अशी घडी घालता येअील ?

समजा, तुमच्याकडे अैसपैस पण तलम कापडाचा अेक टॉवेल आहे. त्याची अेक घडी घातली, की त्याचे क्षेत्रफळ निम्मे आणि जाडी दुप्पट होते. अशा तऱ्हेने तुम्ही तीस वेळा घड्या घातल्या तर टॉवेलची जाडी किती होअील ? मुळात त्याची जाडी अेक-दशांश मिलिमीटर –म्हणजे मीटरचा हजाराव्या भागाचा दहावा भाग– अितकी असली तर घड्या घातल्यावर साधारणपणे किती होअील ? येथे चार पर्याय सुचवले आहेत :

१. अेक मीटर किंवा कमीच

२. शंभर मीटर

३. अेक ते दहा किलोमीटर

४. दहा किलोमीटरहून जास्त

तुम्ही हिशोब करून पाहा म्हणजे अुत्तराने तुम्हालाच आश्चर्य वाटेल. (आणि प्रत्यक्षात अशा घड्या घालणे किती अवघड असेल याचीही कल्पना येअील.)

सर्वच अनंत सारखे नसतात !

वरील प्रश्नात सतत २ ने गुणत गेल्यास किती मोठी संख्या तयार होत जाते याची कल्पना देण्याचा प्रयत्न केला आहे. तर सर्वांत मोठी संख्या कोणती ?

'अनंत' किंवा Infinitiy ही संख्येची कल्पना अशा मोठ्या– वाढत जाणाऱ्या-संख्यांतूनच निर्माण झाली आहे. आपण म्हणतो :

१, २, ३, ४, ... (∞)

हा क्रम वाढत-वाढत अनंताला जाअून भिडतो. ह्या क्रमाच्या शेवटी अनंत हे ' ∞ ' ह्या चिन्हाने सूचित केले जाते.

अनंतात अनंत मिळवला तरी अनंत हेच अुत्तर येते.

$$\infty + \infty = \infty$$

हाच नियम गुणाकाराला पण लागू आहे.

$$\infty \times \infty = \infty$$

पण सर्वच अनंत सारखे असतात का ?

नाही !

दोन प्रकारचे अनंत

वरील आश्चर्यकारक अुत्तराचा खुलासा असा– आपण वर १, २, ३, ४— अशा संख्यांचा क्रम लावला ज्याचा शेवट अनंतात होतो. पण आपल्याला ह्या क्रमात अमुक अेक नंबरची संख्या व्यवस्थित शोधून काढता येते. अुदाहरणार्थ, हजारावी संख्या म्हणजे १०००, दहा हजारावी म्हणजे १००००.

अशा प्रकारच्या ∞ ला मोजण्याजोगा अनंत म्हणतात.

ह्याची काही अुदाहरणे पाहा : खालील न संपणारा अनुक्रम

२, ४, ६, ८ ———

हा सर्व सम संख्यांचा आहे. म्हटले तर हा अनुक्रम आधी नमूद केलेल्या

१, २, ३, ४ ———

ह्या अनुक्रमात समाविष्ट आहे. पण दोन्ही अनुक्रमांत मोजण्याअितक्या अनंत (∞) संख्या आहेत. २, ४, ६, ८ —— ह्या अनुक्रमात अमुक अेक क्रमाची संख्या सांगता येते. अुदाहरणार्थ हजारावी संख्या म्हणजे २०००, दहा हजारावी संख्या म्हणजे २०,००० . . .

दुसरे अुदाहरण : ० ते १ च्या दरम्यानच्या व्यवहारी अपूर्णांकांचे. (अेका पूर्णांकाला दुसऱ्या पूर्णांकाने भाग दिल्यास निर्माण होणारा अपूर्णांक म्हणजे व्यवहारी अपूर्णांक) हा अनुक्रम खालीलप्रमाणे तयार करता येतो :

$\frac{१}{२}, \frac{१}{३}, \frac{२}{३}, \frac{१}{४}, \frac{२}{४}, \frac{३}{४}, \frac{१}{५}, \frac{२}{५}, \frac{३}{५}, \frac{४}{५},$

हा अनुक्रम वाढत्या क्रमाने नाही. तसेच अेकच अपूर्णांक अनेक वेळा वरील अनुक्रमात येतो. अुदाहरणार्थ $\frac{१}{२}, \frac{२}{४}, \frac{३}{६}$ हे सर्व अेकच अपूर्णांक दर्शवतात.

परंतु ह्या अनुक्रमात ० ते १ च्या दरम्यानचे सर्व व्यवहारी अपूर्णांक आहेत. आणि त्यांचा क्रम लावता येतो.

अुदाहरणार्थ १०० वा अपूर्णांक ९।१५ आहे. (१००० वा अपूर्णांक शोधून काढा !)

म्हणून ० ते १ च्या दरम्यानच्या सर्व व्यवहारी अपूर्णांकांची संख्या मोजण्याअितकी अनंत आहे.

त्या अुलट काही अनंत असे असतात, की ज्यांची वरप्रमाणे क्रम लावून मोजदाद करता येत नाही. अुदाहरणार्थ, खालील चित्रात अेक यूनिट लांब सरळ रेषा काढली आहे.

१।४ १।२

०———————————१

१।३

० ते १ च्या दरम्यान चे सर्व अपूर्णांक ह्या रेषेवर दाखवता येतात. १।२, १।४, १।३ हे प्रत्यक्ष दाखवले आहेत ते व्यवहारी अपूर्णांक आहेत. अशा प्रकारच्या सर्व व्यवहारी अपूर्णांकांनी ही रेषा भरून

(पान ५७ वर)

गणितातल्या गमती :

(पान ४१ वरून)

जाईल का ? रेषेवर अनंत बिंदू आहेत आणि व्यवहारी अपूर्णांकही अनंत आहेत. पण वास्तविक बिंदूंचा अनंत हा व्यवहारी अपूर्णांकांच्या अनंतापेक्षा मोठा आहे आणि हा अनंत १, २, ३, ४--- ह्या क्रमाने मोजण्यासारखा नाही !

म्हणजे ह्या रेषेवरच्या बिंदूंचा असा कुठलाच क्रम लावता येणे शक्य नाही, की ज्यामुळे कुठलाही बिंदू त्यामध्ये अमुक नंबरचा (म्हणजे १०० वा किंवा १००० वा अ.) असे सांगता येईल. हे गणिताने सिद्ध करता येते.

त्यामुळे सगळेच अनंत सारखेच असतात असे गणिती कबूल करणार नाहीत !

लेखांक ४ मधला गुणाकार

गेल्या लेखात १७ × ७ हा गुणाकार वेगळ्या पद्धतीने केला होता. त्याचे रहस्य कळायला आपण १७ ही संख्या ० आणि १ च्या गणितात मांडू.

१७ = १०००१.

त्यात अेकम् स्थानच्या १ ची किंमत १ आहे. त्यानंतरच्या प्रत्येक स्थानाची किंमत दुपटीने वाढते. म्हणजे पाचव्या स्थानावरच्या १ ची किंमत २ × २ × २ × २ = १६ आहे. १६ + १ = १७ ह्याला ७ ने गुणताना आपण १७ × ७ = १६ × ७ + १ × ७ असे मांडू शकू. गुणाकाराच्या नवीन पद्धतीत हाच नियम अवलंबिला होता.

वाचकांनी स्वतःच आणखी अुदाहरणे घेअून हा नियम पडताळून पाहावा.

-- जयंत नारळीकर