

तर अशा काहींना काहीतरी विचित्र गुण असलेल्या संख्या किती असतील? आपल्याला वाटते की अशा असंख्य संख्या असतील. पण हे सिद्ध कसे करायचे? अंक पद्धत अशी. 'अ' हे अंक विधान करा :

अ : कुतूहलजनक संख्या अनंत आहेत.

समजा 'अ' असत्य आहे. म्हणजे अशा आकड्यांची संख्या परिमित आहे. तसे असले तर त्यांतील सर्वांत मोठी संख्या कुठली हे सांगता येतील. समजा, ही संख्या 'क' ह्या अक्षराने दाखवता येतील.

म्हणजे 'क' पेक्षा मोठ्या सर्व संख्या कुतूहलशून्य आहेत. आणि 'क+१' ही संख्या अशा सर्व संख्यांत पहिली आहे.

पण कसलेही वैचित्र्य नसलेल्या संख्यात सर्वांत लहान असणे हाही अंक कुतूहलाचा विषय नव्हे का ?

म्हणून 'क+१' ह्या संख्येत पण कुतूहलजनक गुण आहे. पण 'क' ही संख्या असा गुण असलेल्या संख्यांत सर्वांत मोठी असे आपण नुकतेच म्हटले नाही का ?

लेखांक - ६

दोनच पर्याय : सत्य किंवा असत्य

कोणतेही प्रमेय सिद्ध करायला गणितज्ञाला तर्कशास्त्राच्या नियमांचा अपुयोग करावा लागतो. ह्या पैकी अंका विशिष्ट नियमांचा प्रयोग गणितात अनेक वेळा केला जातो आणि तो म्हणजे असा:

'अमुक अंक विधान सत्य तरी असेल किंवा असत्य तरी असेल. आणखी तिसरा पर्याय नाही.'

समजा, 'अ' हे अंक विधान आहे आणि ते सत्य आहे असे सिद्ध करायचे आहे. कधी-कधी 'अ' ची सत्यता प्रत्यक्ष सिद्ध करणे अवघड असते, म्हणून गणिती वेगळा मार्ग अवलंबितो. तो असे गृहीत धरतो की 'अ' हे असत्य आहे. तसे गृहीत धरले तर त्यातून कायकाय निष्कर्ष निघतील? जर त्यापैकी अखादा निष्कर्ष असत्य किंवा पूर्वी सिद्ध केलेल्या नियमांशी विसंगत निघाला तर " 'अ' असत्य आहे " हे विधान चूक ठरते आणि पर्यायाने 'अ' सत्य आहे असा निष्कर्ष निघतो.

ह्याची दोन अुदाहरणे खाली दिली आहेत.

कुतूहलजनक संख्या किती ?

गेल्या अंका लेखात १, २, ३... अित्यादी आकड्यांची संख्या असंख्य आहे असे म्हटले होते. त्यातील कुतूहलजनक गुण असलेल्या संख्या किती असतील? अित्ये कुतूहलजनक गुण म्हणजे कोणताही गुण समजावा, ज्यामुळे ती संख्या आपले लक्ष्य आकर्षित करू शकेल. अुदाहारणार्थ, १११ ह्या संख्येमध्ये सर्वच अंक १ आहेत, हा गुण आहे. ४ ह्या संख्येत असा गुण आहे की ती २×२ किंवा २+२ अशी दोन प्रकारे लिहिता येतील.

गणितातल्या गमती जमती

आणि 'क+१' ही 'क' पेक्षा मोठी आहे.

ही विसंगती आढळल्यामुळे 'अ' हे विधान असत्य आहे असा आपला समज चुकीचा ठरतो. म्हणून 'अ' हे सत्य आहे असे सिद्ध होते !

हा माणूस कुठल्या जातीचा ?

अंका बेटावर दोन जातीचे लोक होते. अंका जातीचे लोक नेहमी खरे बोलायचे तर दुसऱ्या जातीचे लोक नेहमी खोटे बोलायचे. अंका परदेशातला अंक माणूस तेथे आला. त्याला तीन लोक बरोबर जाताना दिसले. आपण त्यांना 'अ', 'ब', 'क' म्हणू.

त्याने 'अ' ला विचारले: 'तू कोणत्या जातीचा ?'

'अ' काहीतरी पुटपुटला. पण ते प्रश्न विचारणाऱ्याला कळलेच नाही.

"काय म्हणाला तो?" त्याने 'ब' आणि 'क' ना विचारले.

"तो म्हणतो मी खरे बोलणारा आहे" 'ब' अुत्तरला.

"नाही! तो म्हणाला की मी खोटे बोलणारा आहे" 'क' ने त्याला खोडून काढले.

प्रश्न असा : 'ब' आणि 'क' कुठल्या जातीचे होते ?

हा प्रश्न सोडवायला वरील तंत्राचा अवलंब करू. समजा, 'क' खरे बोलणारा आहे. म्हणजे 'अ' म्हणाला की तो स्वतः खोटे बोलतो. जर 'अ' हा खरे बोलणारा असता तर त्याने विचारलेल्या प्रश्नाचे अुत्तर दिले असते की 'मी खरे बोलणारा आहे. जर 'अ' हा खोटे बोलणारा असता तरी त्याने हेच अुत्तर दिले नसते का ? कुठल्याही परिस्थितीत 'मी खोटे बोलणारा आहे' असे 'अ' म्हणणार नाही. म्हणजे 'क' चे विधान खोटे ठरते - म्हणून तो खरे बोलणारा नाही- खोटे बोलणारा आहे.

पर्यायाने 'ब' खरे बोलणारा ठरतो.

अशा तऱ्हेच्या युक्तिवादावर आधारलेली काही कोडी खाली देत आहे. पाहा सोडवण्याचा प्रयत्न करून.

(१) मुंबई, पुणे आणि गोवा ह्या तीन ठिकाणी जाणारे रस्ते अंका ठिकाणी मिळतात (पुढील पानावरील चित्र पाहा) आणि त्या ठिकाणी अंक घर आहे.

त्यात दोन भाऊ राहतात. अंक भाऊ नेहमी खोटे बोलतो तर दुसरा नेहमी खरे बोलतो. अंक माणूस मुंबईहून ह्या ठिकाणी आला. त्याला पुण्याला जायचे होते पण रस्त्यांची नावे कुठेच नव्हती. तेव्हा त्याने ह्या घराचे दार ठाठावले आणि दोघा भावांना प्रत्येकी अंकच आणि तोच प्रश्न विचारला. त्यांच्या अुत्तरावरून त्याला सांगता आले की खरे बोलणारा कोण आणि खोटे बोलणारा कोण. शिवाय त्याला पुण्याचा रस्ता कुठला ही पण माहिती मिळाली.

त्याने विचारलेला प्रश्न कोणता ?

(२) अेका राजाला प्रधान नेमायचा होता. त्याने हुशार पंडितांना बोलवून सर्वांत विचारवान पंडित नेमायचे ठरवले. निवड करता करता शेवटी तीन पंडित अुरले. त्यांची परीक्षा घेण्याकरता त्याने सर्वांना अेका टेबलाभोवती बसवले आणि त्यांचे डोळे बांधून सांगितले: “तुमच्या प्रत्येकाला कपाळावर लाल किंवा पांढरे गंध लावण्यात येतील. डोळ्यांची पट्टी काढल्यावर तुम्ही अेकमेकांकडे पाहा. ज्याला कोणाला दुसऱ्याच्या कपाळावर (अेकाच्या किंवा दोघांच्या) लाल गंध दिसेल त्याने हात वर करायचा.”

राजाने प्रत्येकाच्या कपाळावर लाल गंध लावले. पट्टी काढल्यावर तिघांचे हात वर झाले.

“आता ओळखा पाहू स्वतःच्याच गंधाचा रंग ?” राजाने आव्हान दिले.

बऱ्याच वेळ विचार केल्यावर त्यातल्या सर्वांत हुशार पंडिताने सांगितले, “माझे गंध लाल रंगाचे आहे” त्याला प्रधानकी मिळाली.

त्याने कुठला युक्तिवाद केला असेल ?

(३) अेका शाळेत दहा व्रात्य विद्यार्थी होते. प्रत्येकाचे पालक वेगळे होते. अनेक-वेळा दम भरूनही हे विद्यार्थी वठणीवर आणायला त्यांच्या मास्तरांना जमले नाही. ते हेडमास्तरांकडे गेले आणि त्यांनी सर्व परिस्थिती निवेदन केली.

“हे काम शेवटी पालकांवर सोपवले पाहिजे. मी सर्वच पालकांना अेक नोटीस पाठवतो” हेडमास्तर म्हणाले. त्यांनी शाळेतल्या सर्व विद्यार्थ्यांच्या पालकांना पत्रे पाठवली:

“ह्या शाळेत काही विलक्षण व्रात्य विद्यार्थी आहेत. तुम्हाला तुमचा मुलगा व्रात्य असल्याची खात्री असल्यास शाळेत येऊन प्रार्थनेनंतर सर्व विद्यार्थ्यांसमोर तुम्ही त्याला समज द्यावी.”

गंमत म्हणजे प्रत्येक पालकाला अितर मुलांची ते व्रात्य आहेत का नाही याची माहिती होती. पण स्वतःच्या मुलाचीच खात्री नव्हती. पण दुसऱ्याला विचारणे त्यांना कमीपणाचे वाटत होते. म्हणून त्यांनी तर्कशास्त्राचा अुपयोग केला.

पहिल्या दिवशी कोणीच पालक आपल्या मुलांना शिक्षा करायला आले नाहीत. दोन दिवस झाले— तिसरा दिवस गेला काही घडले नाही.

मास्तरलोक हेडमास्तरांकडे गेले, “अहो, तुमच्या पत्राचा काही अुपयोग झालेला नाही. पालकांनी दखल घेतली नाही आणि व्रात्यपणा तर जोरात आहे.”

“जरा दमाने घ्या ! पालकलोक हुशार आहेत. योग्य वेळी आपले कर्तव्य बजावतील.” हेडमास्तर आत्मविश्वासाने म्हणाले.

आणि खरोखरच दहाव्या दिवशी दहाही व्रात्य मुलांच्या पालकांनी येऊन आपल्या रत्नांचा योग्य तो समाचार घेतला !